



AVALIAÇÃO DE OPERADORES CONVOLUCIONAIS NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO ACÚSTICA DA ONDA

Bruno de Souza Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Luiz Landau

Rio de Janeiro
Março de 2014

AVALIAÇÃO DE OPERADORES CONVOLUCIONAIS NA SOLUÇÃO DA
EQUAÇÃO ACÚSTICA DA ONDA

Bruno de Souza Silva

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
CIVIL.

Examinada por:

Prof. Luiz Landau, D.Sc.

Dr. Josias José da Silva, D.Sc.

Prof. Carlos Andrés Reyna Vera-Tudela, D.Sc.

Dr. Djalma Manoel Soares Filho, D.Sc.

Prof. Leandro Di Bartolo, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2014

Silva, Bruno de Souza

Avaliação de Operadores Convolucionais na Solução da Equação Acústica da Onda/Bruno de Souza Silva. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2014.

XVI, 91 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Luiz Landau

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2014.

Referências Bibliográficas: p. 70 – 74.

1. Modelagem Sísmica. 2. Operador Diferencial Convolucional. 3. Migração Acústica. 4. Migração RTM. I. Landau, Luiz. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

*A minha mãe, Maria Célia, por
sempre estar ao meu lado me
guiando e incentivando em cada
etapa da minha vida e a minha
namorada Gisele, pelo imenso
apoio e compreensão em todos os
momentos.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por tudo que alcancei.

Agradeço ao coordenador Prof. Luiz Landau, e a todo corpo técnico administrativo dos laboratórios LAMCE e LAB2M da COPPE/UFRJ pela oportunidade da realização deste trabalho.

Agradeço ao geofísico Dr. Josias José da Silva pelas inúmeras correções, sugestões e discussões ao longo deste trabalho.

Agradeço aos geofísicos Wilson Souza Duarte e Felipe de Souza Duarte por toda as contribuições para o desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço aos meus professores de graduação que muito contribuíram para a minha formação com seus ensinamentos e conselhos: Carlos Andrés, Eulina Coutinho, Luiz Maltar e Carlos Mathias.

Agradeço aos companheiros de laboratório os geofísicos Marcio Martins, Rafael Lourenço, Marília Carneiro, Danilo Leite e Luana Nobre pelas discussões e incentivo.

Aos examinadores da banca por suas importantes correções, revisões e contribuições para elaboração do documento final.

Obrigado IBP, pelo apoio financeiro!

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

AValiação DE OPERADORES CONVOLUCIONAIS NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO ACÚSTICA DA ONDA

Bruno de Souza Silva

Março/2014

Orientador: Luiz Landau

Programa: Engenharia Civil

Com intuito de melhorar a precisão e reduzir o custo do Método das Diferenças Finitas, foi utilizado um operador diferencial convolucional, em que empregou-se diferentes funções janela para gerar novos coeficientes de diferenças finitas. Foi testado um novo limite de erro, para aproximação das derivadas parciais presentes na equação da onda, que proporcionou coeficientes de diferenças finitas otimizados. Tal erro junto a metodologia de análise de dispersão, provém uma modelagem com uma significativa redução do custo computacional. Foi considerado um critério a fim de gerar os parâmetros de estabilidade e dispersão, para qualquer ordem de discretização. As diferentes ordens de precisão do novo operador otimizado foi comparada com diversas ordens do operador convencional (Taylor), evidenciando a precisão e o menor custo computacional do novo método. Para a décima sexta ordem de expansão do Método de Diferenças Finitas otimizado, foi alcançado um número de pontos por comprimento de onda igual a 2,3, o que proporcionou, em relação a quarta ordem convencional, uma redução do tempo de processamento de aproximadamente 42%, acompanhado de uma redução na demanda de memória próxima de 80%. O custo computacional relacionado a demanda de memória e o tempo de processamento, foi uma importante avaliação para escolher a ordem utilizada na Migração Reversa no Tempo, de forma a inferir uma migração mais eficiente que a convencional.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

EVALUATION OF CONVOLUTIONAL OPERATORS IN SOLUTION OF ACOUSTIC WAVE EQUATION

Bruno de Souza Silva

March/2014

Advisor: Luiz Landau

Department: Civil Engineering

In order to improve accuracy and reduce the cost of Finite Difference Method, a convolutional differentiator operator, in which we used different functions window to generate new coefficients of finite differences. A new error bound for the approximation partial derivative present in the wave equation, which yielded coefficients optimized finite differences was tested. Such an error along the dispersion analysis methodology, derives a model with a significant reduction in computational cost. Was regarded as a criterion in order to generate the parameters of stability and dispersion, for any order of discretization. The different orders of accuracy of the new optimized operator was compared with several orders of conventional operator (Taylor), demonstrating accuracy and lower computational cost of the new method. For the sixteenth order expansion of Finite Difference Method optimized, a number of points per wavelength equal to 2.3, which provided, for the fourth conventional order, reducing the processing time of about 42%, accompanied by a reduction in demand was achieved next memory 80%. The computational cost associated memory demand and processing time, was an important evaluation to choose the order used in the Reverse Time Migration in in order to infer a more efficient migration that conventional.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Símbolos	xiv
Lista de Abreviaturas	xvi
1 Introdução	1
1.1 Metodologia e Objetivo	4
1.2 Estrutura da Dissertação	5
2 Obtenção dos Operadores de Diferenças-Finitas	6
2.1 Introdução	6
2.2 Operador de Diferenças-Finitas Convencional	7
2.3 Operador de Diferenças Finitas Convolutacional	10
2.4 Melhoria na Propriedade de Dispersão	14
2.4.1 Funções Janela	14
2.4.2 Erro Espectral na Malha Simples	16
3 Modelagem Sísmica	24
3.1 Fórmula de Modelagem Discreta da Equação Acústica da Onda	25
3.2 Análise de Dispersão e Estabilidade	26
3.3 Critério de Dispersão e Estabilidade	32
4 Migração Reversa no Tempo	33
4.1 Suavização no Campo da Vagarosidade	34
4.2 RTM Utilizando Condição de Imagem Tempo de Excitação	35
4.3 RTM Utilizando Condição de Imagem de Correlação Cruzada	38
5 Aplicações e Resultados	40
5.1 Modelo Homogêneo	41
5.1.1 Avaliação para expansão de 8 ^a ordem	41

5.1.2	Avaliação para expansão de 12 ^a ordem	47
5.1.3	Avaliação para expansão de 16 ^a ordem	52
5.2	Modelo Marmousi	57
5.3	Avaliação Computacional	62
5.4	Migração RTM	64
6	Conclusão	67
6.1	Resultados	67
6.2	Trabalhos Futuros	69
	Referências Bibliográficas	70
A	Equação Acústica da Onda	75
B	Equação Elástica da Onda	78
C	Fórmula de Modelagem Discreta da Equação Elástica da Onda	83
D	Fonte Sísmica e Tratamento das Reflexões de Bordas	86
D.1	Fonte Sísmica	86
D.2	Tratamento das Reflexões de Bordas	87
E	Discretização do Operador Diferencial Convolutacional	89

Lista de Figuras

1.1	Representação da aquisição sísmica marítima (a) e terrestre (b). Fonte: www.sercel.com/about/what-is-geophysics.aspx	2
2.1	Diferenciador convolucional para derivada segunda.	11
2.2	Comparação do erro absoluto dos operadores da derivada segunda convencional com os convolucionais para 2 ^a ordem no domínio do número de onda. Com $k = 0.19309$, $\alpha = 0.54$, $\xi = 5.3$ e $\sigma = 4.78$. . .	17
2.3	Comparação do erro absoluto dos operadores da derivada segunda convencional com os convolucionais para 4 ^a ordem no domínio do número de onda. Com $\alpha = 0.49$ e $\xi = 5.2$	17
2.4	Comparação do erro absoluto dos operadores da derivada segunda convencional com os convolucionais para 8 ^a ordem no domínio do número de onda. Com $M = 0$, $\alpha = 0.57$ e $\xi = 9.0$ e $\sigma = 7.8$	18
2.5	Comparação do erro absoluto dos operadores da derivada segunda convencional com os convolucionais para 10 ^a ordem no domínio do número de onda. Com $M = 2$, $k = 0.207$, $\alpha = 0.54$, $\xi = 7.4$ e $\sigma = 7.6$	18
2.6	Comparação do erro absoluto dos operadores da derivada segunda convencional com os convolucionais para 12 ^a ordem no domínio do número de onda. Com $M = 2$, $k = 0.15$, $\alpha = 0.55$, $\xi = 7.25$ e $\sigma = 7.3$	19
2.7	Comparação do erro absoluto do operador convencional com o convolucional para 16 ^a ordem no domínio do número de onda. Com $M = 16$, $k = 0.15$, $\alpha = 0.55$, $\xi = 7.25$ e $\sigma = 7.3$	20
2.8	Comparação do erro absoluto entre o operador convencional e convolucional de 32 ^a ordem. Com $M = 24$, $k = 0.15$, $\alpha = 0.55$, $\xi = 7.25$ e $\sigma = 7.3$	21
2.9	Comparação do erro absoluto entre o operador convencional, convolucional e convolucional otimizado.	22
3.1	Direção de Propagação da onda plana. Retirada de DUARTE (2012)	27
3.2	Avaliação da velocidade de fase para aproximação de 4 ^o ordem considerando ângulos entre 0 ^o à 45 ^o	29

3.3	Avaliação da velocidade de fase para aproximação de 8° ordem, com $\mu = 0.07$	29
3.4	Avaliação da velocidade de fase para aproximação de 12° ordem, com $\mu = 0.061$	30
3.5	Avaliação da velocidade de fase para aproximação de 16° ordem, com $\mu = 0.058$	30
3.6	Avaliação da dispersão numérica para modelagem da equação acústica da onda 2D pelo MDF com aproximação de 4° ordem, considerando $\theta = 0^\circ$	30
3.7	Avaliação da dispersão numérica para modelagem da equação acústica da onda 2D pelo MDF com aproximação de 8° ordem, considerando $\theta = 0^\circ$	31
3.8	Avaliação da dispersão numérica para modelagem da equação acústica da onda 2D pelo MDF com aproximação de 12° ordem, considerando $\theta = 0^\circ$	31
3.9	Avaliação da dispersão numérica para modelagem da equação acústica da onda 2D pelo MDF com aproximação de 16° ordem, considerando $\theta = 0^\circ$	31
3.10	Análise comparativa da velocidade de fase utilizando os operadores de diferenças finitas convencionais e convolucionais, considerando μ entre 0.048 e 0.23.	32
4.1	Comparação para reflexão em um modelo normal, suavizado na velocidade e na vagarosidade.	35
4.2	Representação da RTM utilizando o critério de amplitude máxima. Observa-se a coincidência temporal do campo de ondas descendente com o ascendente, quando o tempo $TD(x, z)$ for igual ao tempo t	37
4.3	Representação do princípio de coincidência temporal. Campo de ondas ascendentes e descendentes se interceptam no mesmo instante, somente na interface.	38
5.1	<i>Snapshots</i> da Modelagem 2D em um modelo homogêneo calculado pelo MDF utilizando operador de 8ª ordem otimizado.	43
5.2	<i>Snapshots</i> da Modelagem 2D em um modelo homogêneo calculado pelo MDF, utilizando o operador de 12ª ordem convencional.	44
5.3	<i>Snapshot</i> da Modelagem 2D em um modelo homogêneo calculado pelo MDF, utilizando operador convencional de 8ª ordem.	45
5.4	Comparação da precisão dos operadores convencional e otimizado.	46
5.5	<i>Snapshots</i> da Modelagem 2D em um modelo homogêneo calculado pelo MDF, utilizando operador de 12ª ordem otimizada	48

5.6	<i>Snapshots</i> da Modelagem 2D em um modelo homogêneo calculado pelo MDF, utilizando operador de 24 ^a ordem convencional	49
5.7	<i>Snapshot</i> da Modelagem 2D em um modelo homogêneo calculado pelo MDF, utilizando operador de 12 ^a ordem convencional.	50
5.8	Comparação entre os operadores de 12 ^a ordem otimizada, 12 ^a ordem convencional e 24 ^a ordem convencional.	51
5.9	<i>Snapshots</i> da Modelagem 2D em um modelo homogêneo calculado pelo MDF utilizando a 16 ^a ordem do operador convencional.	53
5.10	Snapshots da Modelagem 2D para um modelo homogêneo calculado pelo MDF utilizando operador de 36 ^a ordem convencional.	54
5.11	Snapshots da Modelagem 2D para um modelo homogêneo calculado pelo MDF utilizando operador de 16 ^a ordem convencional.	55
5.12	Comparação entre os operadores de 16 ^a ordem otimizada, 16 ^a ordem e 36 ^a ordem convencional.	56
5.13	Modelo Marmousi modificado com dimensões de 9210 m x 3410 m	57
5.14	Avaliação da precisão de 3 diferentes ordens do operador de DF. O registro contínuo representa a 36 ^a ordem do operador.	59
5.15	Avaliação da precisão de 3 diferentes ordens do operador de DF. O registro contínuo representa a 36 ^a ordem do operador.	60
5.16	Avaliação da precisão de 3 diferentes ordens do operador de DF. O registro contínuo representa a 36 ^a ordem do operador.	61
5.17	Resultado da demanda de memória para diferentes ordens de discretização empregadas na modelagem acústica 2D.	62
5.18	Resultado do tempo computacional para diferentes ordens de discretização empregadas na modelagem acústica 2D.	63
5.19	Modelo de velocidade utilizado na RTM para avaliar o operador de 4 ^a ordem convencional.	64
5.20	Resultado da RTM utilizando o operador de 4 ^a ordem convencional.	65
5.21	Resultado da RTM utilizando o operador de 16 ^a ordem convencional.	65
5.22	Resultado da RTM utilizando o operador de 16 ^a ordem otimizada.	66
C.1	Malha intercalada no espaço e tempo (modificado de DI BARTOLO (2010)).	83
D.1	Função fonte e seu espectro de frequência para $f_{corte} = 40\text{Hz}$	87
D.2	Camada de amortecimento do lado direito da malha ilustrando o ponto de aplicação do amortecimento. Retirado de DUARTE (2011)	88

Lista de Tabelas

2.1	Coeficientes do MDF para derivada segunda, malha regular.	8
2.2	Coeficientes do MDF para derivada primeira, malha regular	9
2.3	Coeficientes do MDF para derivada primeira, malha intercalada	9
2.4	Coeficientes convolucional otimizado para operador DF, retirados de ZHANG e YAO (2013).	22
5.1	Parâmetros para modelagem acústica da onda empregando o operador convencional.	41
5.2	Parâmetros para modelagem acústica da onda utilizando operador otimizado.	41
5.3	Parâmetros da modelagem para avaliação de 8 ^a ordem de expansão do operador otimizado.	42
5.4	Parâmetros da modelagem acústica da onda para avaliação de 12 ^a ordem do operador otimizado.	47
5.5	Parâmetros da modelagem acústica da onda para a expansão de 16 ^a ordem do operador otimizado.	52
5.6	Parâmetros para RMT.	64
5.7	Parâmetros para RMT.	65

Lista de Símbolos

A	Campo de Ondas Ascendente, p. 39
C	Velocidade da Onda no Meio Contínuo, p. 27
C_{FD}	Velocidade da Onda Sobre o Meio Discreto, p. 27
C_{max}	Maior Velocidade do Meio Contínuo, p. 32
C_{min}	Menor Velocidade do Meio Contínuo, p. 32
D	Campo de Ondas Descendente, p. 39
G	Número de Pontos por Comprimento de Onda, p. 28
I_m	Matriz de Migração, p. 37
M	Parâmetro de Otimização da <i>Scaled Binominal Window</i> , p. 15
T	Tempo do Campo Descendente mais Ascendente, p. 39
TD	Matriz Tempo de Trânsito, p. 36
α	Parâmetro de Otimização da <i>Generalized-powered Hanning Window</i> , p. 15
$*$	Convolução em relação a x , p. 10
β	Parâmetro da equação de Estabilidade, p. 32
$\hat{d}_2(k_x)$	Diferencial Convolutacional no Domínio do Número de Onda, p. 10
κ	Parâmetro de Otimização da <i>Gaussian window</i> , p. 14
$\mathcal{F}\{\cdot\}$	Transformada Direta de Fourier, p. 10
$\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$	Transformada Inversa de Fourier, p. 10
μ	Número de Courant-Friendrichs-Lewy, p. 27

ω	Frequência Angular, p. 26
σ	Parâmetro de Otimização da <i>Powered Hanning</i> , p. 15
ξ	Parâmetro de Otimização da <i>Generalized-powered Hanning Window</i> , p. 15
b_n	Coefficientes do Operador de Diferenças Finitas para Derivada Primeira Malha Regular, p. 8
c_n	Coefficientes do <i>Stencil</i> de Diferenças Finitas, p. 7
c_m	Coefficientes do <i>Stencil</i> do Operador de Diferenças Finitas, p. 27
$d_2(x)$	Diferenciador Convolutacional, p. 10
f_{corte}	Frequência de Corte, p. 32
h	Espaçamento da malha, p. 27
k_x	Número de Onda na Direção x, p. 7, 26
k_z	Número de Onda na Direção z, p. 26
s	Fator de Estabilidade, p. 27
s_n	Coefficientes do Operador de Diferenças Finitas para Derivada Primeira Malha Intercalada, p. 8
t_r	Tempo do Campo Ascendente, p. 39
t_s	Tempo do Campo Descendente, p. 39
$w(n)$	Função Janela ou <i>window function</i> , p. 13
N	Ordem do Operador de Diferenças Finitas, p. 7

Lista de Abreviaturas

MDF	Método das Diferenças Finitas, p. 2
RIF	Resposta Impulsiva Finita, p. 12
RTM	<i>Reverse Time Migration</i> , p. 5

Capítulo 1

Introdução

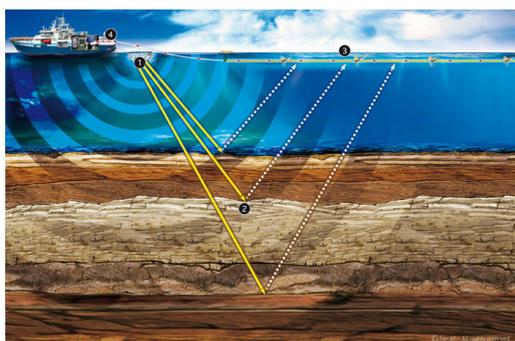
A crescente busca por reservas minerais está presente na humanidade há séculos e as técnicas são aprimoradas a cada ano com o intuito de reduzir o risco econômico durante a exploração e produção. Na indústria de hidrocarbonetos a busca por uma jazida é o desejo de todo investidor, no entanto, o alto custo da exploração pode transformá-la em uma reserva economicamente inviável.

Com o propósito de reduzir o risco na prospecção de hidrocarbonetos e aumentar as chances de sucesso, as investigações geofísicas visam revelar as propriedades físicas do interior da Terra através dos diversos métodos geofísicos. Dentre eles o método sísmico, que mede os tempos de percurso das ondas sísmicas, vem sendo o mais utilizado pela indústria de óleo e gás. Este uso, torna a sísmica de reflexão uma importante ferramenta, por exemplo, para a fase de exploração e monitoramento no decorrer da produção.

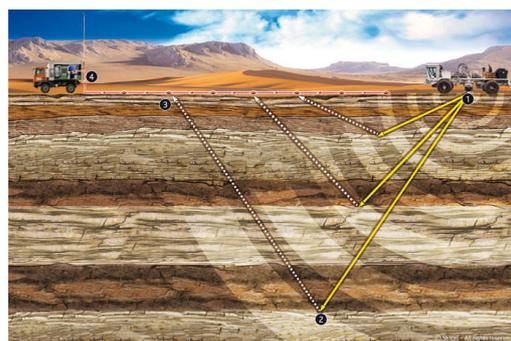
Por meio do levantamento sísmico de reflexão e refração, é possível obter informações importantes a respeito das estruturas geológicas em subsuperfície, pois o registro das reflexões carregam informações valiosas sobre os arcabouços estrutural tornando possível, desta forma, encontrar possíveis *plays* exploratórios.

No levantamento sísmico terrestre e marítimo empregam-se fontes artificiais para gerar uma frente de onda que percorre o interior da Terra, onde após serem refletidas nas interfaces das camadas, retornam para superfície onde são captadas pelos receptores. Os receptores captam, sob a forma de um conjunto de traços sísmicos chamado de sismograma, a amplitude e o tempo que a onda levou para percorrer desde a fonte até o receptor.

Geralmente no levantamento terrestre utiliza-se explosivos ou caminhões vibradores (*vibroscis*). No caso marítimo, a fonte geralmente utilizada são canhões de ar comprimido, conhecido como *Airgun*. O registro é feito através de hidrofones ordenados em cabos chamados de *streamers*, que podem chegar a ter de 3 a 12 km de comprimento, dependendo da profundidade a ser imageada. Apresenta-se na Figura 1.1 um esquema de aquisição terrestre (*onshore*) e marítima (*offshore*).



(a) Aquisição sísmica marítima. 1- Fonte Sísmica, 2- Representação de uma reflexão da estrutura geológica, 3 - *Streamers*, 4 - Navio Sísmico.



(b) Aquisição sísmica terrestre. 1 - Caminhão vibradores, 2- Representação do momento de reflexão na estrutura geológica, 3 - Geofone , 4- Estação de Registro

Figura 1.1: Representação da aquisição sísmica marítima (a) e terrestre (b). Fonte: www.sercel.com/about/what-is-geophysics.aspx

O registro marítimo contempla apenas as amplitudes das ondas P ou ondas compressoriais, pois como a água possui módulo de rigidez igual a zero não haverá propagação das ondas do tipo S (cisalhante).

Para simulação da propagação no interior da Terra utiliza-se a modelagem sísmica. Um modelo matemático que pode ser adotado nessa modelagem para descrever o fenômeno físico da propagação de ondas sísmicas é a equação acústica da onda (BULCÃO, 2004).

A simulação numérica da onda tem sido uma ferramenta indispensável para compreensão da propagação de ondas sísmicas em meios geologicamente complexos, fornecendo eficientes soluções do campo de ondas especialmente para a Migração Reversa no Tempo e para Inversão da Forma de Onda Completa (CHU e STOFFA, 2012). Um método que tem sido largamente usado nesta solução é o Método das Diferenças Finitas (MDF), devido a sua fácil implementação e sua eficiência em meios heterogêneos ((ZHANG e YAO, 2013), (VIRIEUX, 1986), (LEVANDER, 1988).

Convencionalmente, o MDF tem forte dispersão numérica na presença de componentes de altas frequências, o que causa um problema para a indústria, visto que a alta resolução de imagens e a inversão do campo de onda para estruturas complexas requerem a manipulação de altas frequências. Outro obstáculo do MDF é o forte aparecimento de dispersão, quando se usa um espaçamento de malha muito espesso. O uso deste espaçamento é necessário, pois reduz o número de pontos do modelo, o que diminui a demanda de memória e o custo computacional.

Para contornar essa limitação, uma estratégia empregada usualmente consiste em reduzir a frequência de corte para obter um maior espaçamento entre a malha, porém tal estratégia não proporciona uma alta resolução sísmica.

O ideal é utilizar o método Pseudospectral ((GAZDAG, 1981);(KOSLOFF

e BAYSAL, 1982);(KOSLOFF *et al.*, 1984);(FORNBERG, 1987);(RESHEF *et al.*, 1988a);(RESHEF *et al.*, 1988b);(CARCIONE, 1999);(CARCIONE *et al.*, 1992)) que utiliza uma malha espessa, mas também é livre de dispersão numérica na presença de altas frequências, levando em consideração o erro proveniente da discretização no tempo (ZHANG e YAO, 2013). Porém seu uso é muito custoso do ponto de vista computacional.

FORNBERG (1987), provou que as altas ordens do MDF se aproxima do método Pseudospectral. ((ZHOU e GREENHALGH, 1992);(IGEL *et al.*, 1995);(CHU *et al.*, 2009);(CHU e STOFFA, 2012)(ZHANG e YAO, 2013)). Foi demonstrado por CHU e STOFFA (2012) que existe um grupo de truncamento de funções janela que aproxima diretamente o MDF do método Pseudospectral.

O uso de janelas cônicas para reduzir o efeito de dispersão proveniente do truncamento é muito conhecido na literatura. HOLBERG (1987) foi o pioneiro na construção de operadores convolucionais utilizando um método de otimização para derivada espacial, empregada no cálculo da equação da onda. ZHOU e GREENHALGH (1992) utilizou a janela *Generalized-Powered Hanning* para gerar um operador de derivada segunda aplicado na modelagem acústica. Os autores IGEL *et al.* (1995) utilizaram a janela Gaussiana a fim de desenvolver um operador de DF para malha intercalada empregada na modelagem da equação elástica da onda isotrópica. No trabalho de ZHOU *et al.* (1993) foi aplicada a janela *Powered Hanning* e CHU e STOFFA (2012) propuseram a *Scaled Binominal Window*.

CHU e STOFFA (2012) encontraram duas famílias de *Binomial Window* que podem ser utilizadas para derivar operadores de DF analiticamente. Com uma pequena alteração, estas janelas também podem ser utilizadas para derivar operadores com maior propriedade de dispersão. Porém, a utilização destas diferentes funções janelas envolve diversos controles de parâmetros que são difíceis de determinar. Outro fato é que as tais funções necessitam serem manuseadas com cautela pois podem afetar substancialmente o resultado final (ZHANG e YAO, 2013).

Uma saída para contornar esse problema é a utilização de técnicas de otimização para minimizar o erro de dispersão gerando operadores otimizados (CHU e STOFFA, 2012).

ZHANG e YAO (2013) reduziram as dispersões numéricas do MDF, na presença de componentes de altas frequências, otimizando os coeficientes do operador DF através da maximização da convergência do número de onda, dado um limite de erro de 0.0001. Ressalta-se que tal erro é o menor utilizado na literatura, indo de perfeito acordo entre as análises teóricas e experimentos numéricos. Foi examinado também o pico absoluto do erro entre o operador otimizado no domínio do número de onda e o número de onda analítico.

1.1 Metodologia e Objetivo

Nesse trabalho, foi utilizado o MDF para encontrar a solução aproximada das equações diferenciais parciais, que descrevem o fenômeno físico da propagação de ondas sísmicas. Com o propósito de melhorar a precisão do método, aplicou-se uma metodologia que aproxima diretamente o MDF do método Pseudospectral. Por meio da transformada inversa de Fourier foi implementado um operador diferencial convolucional, onde se utilizou diferentes funções janela para buscar novos coeficientes para o MDF.

A melhoria da precisão foi avaliada através da equação do erro espectral, utilizando as diferentes funções janela empregadas no operador. Tal avaliação permite estimar parâmetros para cada função, buscando diminuir o erro numérico proveniente da aproximação, para isso utilizou-se uma limitação do erro de 0,0001.

Nesse trabalho, a dispersão foi avaliada considerando a velocidade de fase da onda. Durante essa avaliação, a fim de que não ocorresse dispersão numérica na modelagem, considerou-se uma metodologia que restringe o intervalo de limitação de erro da curva da velocidade de fase normalizada. Com isso foram gerados os parâmetros de estabilidade e dispersão das altas ordens do MDF, que foram fundamentais para obter uma modelagem sísmica precisa com redução do custo computacional.

Para efeito de comparação, foram gerados resultados para diferentes ordens do método. Foi empregado o operador convencional (Taylor) e o novo operador otimizado na Modelagem Acústica da Onda descrita sobre um modelo homogêneo e sobre um modelo complexo.

As avaliações, do ponto de vista computacional, para as diferentes ordens utilizadas nesse trabalho, foram geradas a fim de alcançar uma redução do custo computacional.

Como aplicação da metodologia descrita nessa dissertação, foi utilizada a Migração Reversa no Tempo.

Esse trabalho tem como principal objetivo, avaliar as altas ordens do MDF empregadas na modelagem acústica da onda aplicado e na Migração Reversa no Tempo, tendo como propósito a redução do custo computacional e o melhoria da precisão.

1.2 Estrutura da Dissertação

A seguir, será apresentado um resumo do conteúdo de cada um dos capítulos desta dissertação.

No Capítulo 2, são apresentados os procedimentos necessários para obtenção dos coeficientes do Método de Diferenças Finitas, de forma convencional e otimizada, obtidas através do emprego de diferentes funções filtro. São também expostas as análises de dispersão numérica visando avaliar a precisão e a eficiência das aproximações.

No capítulo 3, apresentam-se a formulação para obter a discretização da equação acústica da onda empregada na modelagem sísmica, bem como a metodologia de análise de dispersão e estabilidade necessárias para gerar os parâmetros para garantir uma modelagem eficiente e precisa.

No Capítulo 4, é exposto o procedimento empregado na Migração Reversa no Tempo (RTM) utilizando a equação acústica da onda. Será descrito a aplicação da condição de imagem por tempo de excitação baseada no critério de máxima amplitude e a correlação cruzada entre os campos de onda ascendentes e descendentes. Outro tópico importante abordado nesse capítulo é a suavização no campo da vagarosidade.

No Capítulo 5, são apresentados os resultados e respectivas análises de precisão numérica e eficiência computacional do operador de DF convencional e otimizado, empregado na modelagem acústica da onda e na Migração Reversa no Tempo.

Ao final deste trabalho, no Apêndice A, é descrita a formulação da Equação Acústica da Onda e suas condições iniciais utilizadas no caso da geofísica. No Apêndice B é descrita a formulação da Equação Elástica da Onda. No Apêndice C encontra-se a discretização da equação elástica da onda de forma a permitir que se escreva suas derivadas discretas através do operador de DF convolucional e, por último, no Apêndice D, apresenta-se a fonte sísmica utilizada nessa dissertação e o tratamento das reflexões de bordas não reflexivas.

Capítulo 2

Obtenção dos Operadores de Diferenças-Finitas

2.1 Introdução

Na propagação de ondas em meios geologicamente complexos uma ferramenta que tem sido indispensável é a modelagem sísmica (CHU e STOFFA, 2012). O problema da simulação da propagação de ondas sísmicas corresponde em resolver equações diferenciais que descrevem a propagação no interior da Terra, sob um conjunto de condições iniciais, finais e de contorno.

Dentre os muitos métodos numéricos propostos para resolver tais equações diferenciais, o MDF é um dos mais populares, por ser de fácil implementação e também um dos mais bem sucedidos por ser ideal para modelos complexos, devido a sua eficiência (ALFORD *et al.* (1974); VIRIEUX (1986)). Tal método se baseia nas aproximações das derivadas das equações diferenciais através da substituição destas por aproximações discretas.

Em geral, para fazer a aproximação das derivadas, emprega-se uma expansão truncada da série de Taylor, e posteriormente obtém-se os coeficientes referente a cada ponto do *Stencil* da fórmula da DF (operador). Outra estratégia para encontrar os coeficientes, baseia-se na construção de um filtro de resposta finita impulsiva.

Nessa seção, serão apresentados os procedimentos necessários para obtenção dos coeficientes do método de DF, de forma convencional e otimizada, obtidas através do emprego de diferentes funções filtro. Além disso, serão expostas as análises do erro espectral tendo como objetivo avaliar a precisão e a eficiência das aproximações.

2.2 Operador de Diferenças-Finitas Convencional

Nessa seção será discutido como se obtém os coeficientes do operador de DF usando a expansão de Taylor. Outra forma de determinar os coeficientes é usar a interpolação polinomial de Lagrange (FORNBERG, 1998)

Seja $f(x)$ uma função contínua, bem como suas derivadas. Pode-se expandir sua derivada segunda em função da série de Taylor em torno do ponto $x = 0$, através da seguinte expressão:

$$\left. \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[c_0 f_0 + \sum_{n=1}^{N/2} c_n (f_n + f_{-n}) \right], \quad (2.1)$$

onde $f_n = f(n\Delta x)$, Δx é o espaçamento da malha, c_n são os coeficientes referente a cada ponto do *Stencil* da fórmula de DF e N ($N \geq 2$) é um número inteiro par que descreve a ordem do operador. Uma das formas mais gerais de determinar c_n é primeiramente aplicar a transformada de Fourier em ambos os lados da Equação (2.1) obtendo a seguinte Equação:

$$-(k_x \Delta x)^2 = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{N/2} c_n \cos(nk_x \Delta x), \quad (2.2)$$

onde k_x é o número de onda na direção x . Expandindo o termo cosseno através da série de Taylor até a N -ésima ordem e igualando os coeficientes da potência $k_x \Delta x$, obtém-se o seguinte sistema de equações lineares do qual pode-se obter c_n analiticamente ou numericamente.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1^0 & 2^0 & \cdots & \left(\frac{N}{2}\right)^0 \\ 0 & 1^2 & 2^2 & \cdots & \left(\frac{N}{2}\right)^2 \\ 0 & 1^4 & 2^4 & \cdots & \left(\frac{N}{2}\right)^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1^N & 2^N & \cdots & \left(\frac{N}{2}\right)^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

Sendo assim, os coeficientes do MDF Convencional para derivada segunda com $N \in [2, 4, 8, 10, 16]$ são apresentados na Tabela 2.1. Para o caso da fórmula da derivada primeira discretizada em uma malha regular e intercalada, tem-se, respectivamente:

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=1}^{N/2} b_n (f_n - f_{-n}) \quad (2.4)$$

e

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=1}^{N/2} s_n (f_{\frac{2n-1}{2}} - f_{-\frac{2n-1}{2}}), \quad (2.5)$$

onde o termo b_n são os coeficientes do *Stencil* do operador para derivada primeira e s_n são os coeficientes do *Stencil* do operador para malha intercalada.

O procedimento para obter os termos b_n e s_n é o mesmo aplicado para encontrar c_n , aplica-se a transformada de Fourier nas Equações (2.4) e (2.5), resultando em:

$$k_x \Delta x = 2 \sum_{n=1}^{N/2} b_n \sin(nk_x \Delta x), \quad (2.6)$$

$$k_x \Delta x = 2 \sum_{n=1}^{N/2} s_n \sin\left(k_x \Delta x \frac{2n-1}{2}\right). \quad (2.7)$$

Tabela 2.1: Coeficientes do MDF para derivada segunda, malha regular.

N	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
2	-2	1							
4	$-\frac{5}{2}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{12}$						
6	$-\frac{49}{18}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{90}$					
8	$-\frac{205}{72}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{315}$	$-\frac{1}{560}$				
10	$-\frac{5269}{1800}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{21}$	$\frac{5}{126}$	$-\frac{5}{1008}$	$\frac{1}{3150}$			
12	$-\frac{5369}{1800}$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{15}{56}$	$\frac{10}{189}$	$-\frac{1}{112}$	$\frac{2}{1925}$	$-\frac{1}{16632}$		
14	$-\frac{266681}{88200}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{24}$	$\frac{7}{108}$	$-\frac{7}{528}$	$\frac{7}{3300}$	$-\frac{7}{30888}$	$\frac{1}{84084}$	
16	$-\frac{1077749}{352800}$	$\frac{16}{9}$	$-\frac{14}{45}$	$\frac{112}{1485}$	$-\frac{7}{396}$	$\frac{112}{32175}$	$-\frac{2}{3861}$	$\frac{16}{315315}$	$-\frac{1}{411840}$

Novamente, recorre-se à série de Taylor aplicada ao termo seno até a N -ésima ordem e igualam-se os coeficientes da potência $k_x \Delta x$ de tal forma a obter um sistema de equações lineares semelhante ao da expressão (2.3). No caso da derivada primeira da malha regular, tem-se:

$$\begin{bmatrix} (1)^1 & (2)^1 & (3)^1 & \cdots & \left(\frac{N}{2}\right)^1 \\ (1)^3 & (2)^3 & (3)^3 & \cdots & \left(\frac{N}{2}\right)^3 \\ (1)^5 & (2)^5 & (3)^5 & \cdots & \left(\frac{N}{2}\right)^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (1)^{N-1} & (2)^{N-1} & (3)^{N-1} & \cdots & \left(\frac{N}{2}\right)^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{N/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

e da intercalada, teremos :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^1 & \left(\frac{3}{2}\right)^1 & \left(\frac{5}{2}\right)^1 & \dots & \left(\frac{2N-1}{2}\right)^1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 & \left(\frac{3}{2}\right)^3 & \left(\frac{5}{2}\right)^3 & \dots & \left(\frac{2N-1}{2}\right)^3 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^5 & \left(\frac{3}{2}\right)^5 & \left(\frac{5}{2}\right)^5 & \dots & \left(\frac{2N-1}{2}\right)^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} & \left(\frac{3}{2}\right)^{N-1} & \left(\frac{5}{2}\right)^{N-1} & \dots & \left(\frac{2N-1}{2}\right)^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_{N/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Os coeficientes do MDF Convencional para derivada primeira com uma malha regular e intercalado são apresentados respectivamente na Tabela 2.2 e a Tabela 2.3 Destaca-se que a partir das Equações (2.2), (2.6) e (2.7), pode-se mostrar que o MDF é equivalente à aproximação polinomial trigonométrica do método Pseudospectral. O que significa que o MDF aproxima-se do método Pseudospectral quando a ordem do operador é tão grande quanto o tamanho do modelo. Isto é, em caso que todos os pontos da malha são utilizados na aproximação da derivada, o MDF se torna o método Pseudospectral (CHU e STOFFA, 2012).

Tabela 2.2: Coeficientes do MDF para derivada primeira, malha regular

N	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
2	$\frac{1}{2}$							
4	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{12}$						
6	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{60}$					
8	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{105}$	$-\frac{1}{280}$				
10	$\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{21}$	$\frac{5}{84}$	$-\frac{5}{504}$	$\frac{1}{1260}$			
12	$\frac{6}{7}$	$-\frac{15}{56}$	$\frac{5}{63}$	$-\frac{1}{56}$	$\frac{1}{385}$	$-\frac{1}{5544}$		
14	$\frac{7}{8}$	$-\frac{7}{24}$	$\frac{7}{72}$	$-\frac{7}{264}$	$\frac{7}{1320}$	$\frac{7}{10296}$	$\frac{1}{24024}$	
16	$\frac{8}{9}$	$-\frac{14}{45}$	$\frac{56}{495}$	$-\frac{7}{198}$	$\frac{56}{6435}$	$-\frac{2}{1287}$	$\frac{8}{45045}$	$-\frac{1}{102960}$

Tabela 2.3: Coeficientes do MDF para derivada primeira, malha intercalada

N	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
2	1							
4	$\frac{9}{8}$							
6	$\frac{75}{64}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{3}{640}$					
8	$\frac{1225}{1024}$	$-\frac{25}{384}$	$\frac{49}{5120}$	$-\frac{5}{7168}$				
10	$\frac{19845}{16384}$	$-\frac{245}{3072}$	$\frac{567}{40960}$	$-\frac{405}{229376}$	$\frac{35}{294912}$			
12	$\frac{160083}{131072}$	$-\frac{735}{8192}$	$\frac{22869}{1310720}$	$-\frac{5445}{1835008}$	$\frac{847}{2359296}$	$-\frac{63}{2883584}$		
14	$\frac{1288287}{1048576}$	$-\frac{12705}{131072}$	$\frac{429429}{20971520}$	$-\frac{61347}{14680064}$	$\frac{1303}{18874368}$	$-\frac{3549}{46137344}$	$\frac{231}{54525952}$	
16	$\frac{41409225}{33554432}$	$-\frac{429429}{4194304}$	$\frac{3864861}{167772160}$	$-\frac{1254825}{234881024}$	$\frac{325325}{301989888}$	$-\frac{61425}{369098752}$	$\frac{7425}{436207616}$	$-\frac{143}{167772160}$

2.3 Operador de Diferenças Finitas Convolutio- nal

Na seção anterior, foi apresentada a metodologia para gerar os coeficientes de DF através da expansão de Taylor a partir do operador convencional. Nesta seção, será esclarecido, tomando como base o trabalho de ZHOU e GREENHALGH (1992), o conceito da obtenção dos coeficientes de DF gerados a partir de filtros empregados junto ao operador convolutio-
nal.

Do teorema de diferenciação da transformada de Fourier, sabe-se que

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right\} = -k_x^2 \hat{f}(k_x), \quad (2.10)$$

e, uma vez que

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ f \} \cdot \mathcal{F} \{ g \} \} = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ f * g \} \} = f * g, \quad (2.11)$$

tem-se

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = d_2(x) * f(x), \quad (2.12)$$

onde $\mathcal{F} \{ \cdot \}$ e $\mathcal{F}^{-1} \{ \cdot \}$ denotam a transformada direta e inversa de Fourier, respectivamente, e “*” a convolução com respeito a x .

A Equação (2.12) descreve que a derivada parcial de segunda ordem pode ser escrita como a convolução de $d_2(x)$ e $f(x)$, onde $d_2(x)$ é o operador diferencial convolutio-
nal para a derivada segunda, considerado como um filtro. Por esta razão, $d_2(x)$ é concebido como um exercício de síntese de filtro digital na área de processamento de sinal (ZHOU e GREENHALGH, 1992).

No domínio do número de onda, $d_2(x)$ é expresso por $\hat{d}_2(k_x)$ como

$$\hat{d}_2(k_x) = -k_x^2. \quad (2.13)$$

Para que seja possível efetuar os cálculos numericamente utilizando a Equação (2.12), deve-se restringir k_x de tal forma há não haver efeitos espúrios, ou seja,

$$\hat{d}_2(k_x) = \begin{cases} -k_x^2 & \text{para } |k_x| \leq k_{xn} \\ 0 & \text{para } |k_x| > k_{xn} \end{cases}, \quad (2.14)$$

onde k_{xn} é o número de onda de Nyquist, cujo valor é $\pi/\Delta x$.

Aplicando a transformada inversa de Fourier :

$$d_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{d}_2(k_x) e^{ik_x x} dk_x, \quad (2.15)$$

para $x \neq 0$, temos:

$$d_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-k_{xn}}^{k_{xn}} -k_x^2 e^{ik_x x} dk_x = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2k_{xn}}{x^2} \cos(k_{xn}x) + \left(\frac{2}{x^3} - \frac{k_{xn}^2}{x} \right) \sin(k_{xn}x) \right], \quad (2.16)$$

e para $x = 0$, teremos:

$$d_2(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-k_{xn}}^{k_{xn}} -k_x^2 e^{ik_x x} dk_x = -\frac{k_{xn}^3}{3\pi}. \quad (2.17)$$

Logo, o operador diferencial convolucional para derivada segunda em relação a x é:

$$d_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2k_{xn}}{x^2} \cos(k_{xn}x) + \left(\frac{2}{x^3} - \frac{k_{xn}^2}{x} \right) \sin(k_{xn}x) \right] & \text{para } x \neq 0 \\ -\frac{k_{xn}^3}{3\pi} & \text{para } x = 0 \end{cases}. \quad (2.18)$$

Como pode ser observado na Figura 2.1, o operador diferencial convolucional exibe duas propriedades importantes. A primeira delas é relacionada ao rápido decaimento quando fora da origem, isto permite calcular a convolução na Equação (2.12) usando poucos termos do operador diferencial. A segunda propriedade diz respeito ao fato dos coeficientes serem simétricos (ZHOU e GREENHALGH, 1992).

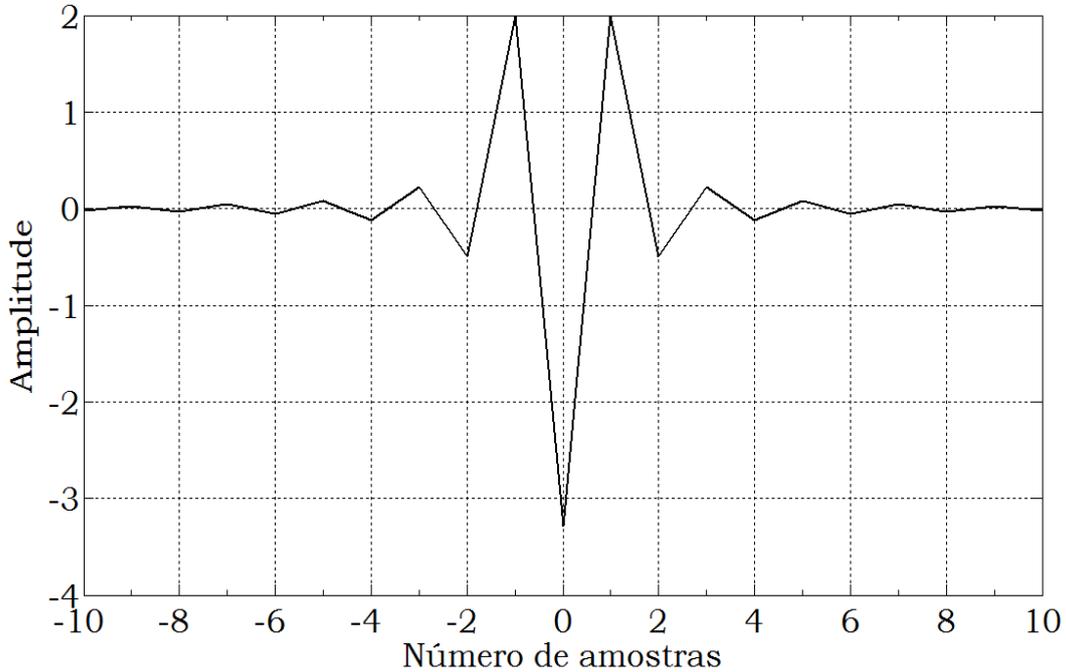


Figura 2.1: Diferenciador convolucional para derivada segunda.

Por questões práticas de otimização quanto à implementação computacional,

resolve-se a integral da Equação (2.16) da seguinte forma (Apêndice E):

$$\left. \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{n=-\infty; n \neq 0}^{\infty} \left[-\frac{2}{n^2} \cos(n\pi) \right] f(n\Delta x). \quad (2.19)$$

onde Δx é o intervalo de amostragem no eixo x .

De forma semelhante, chega-se a uma expressão da derivada primeira para a malha regular e intercalada, respectivamente:

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=-\infty; n \neq 0}^{\infty} \left[-\frac{1}{n} \cos(n\pi) \right] f(n\Delta x), \quad (2.20)$$

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=\frac{\Delta x}{2}} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{\pi} \frac{\sin \left[\left(\frac{1}{2} - n \right) \pi \right]}{\left(\frac{1}{2} - n \right)^2} \right\} f(n\Delta x). \quad (2.21)$$

Segundo ZHOU e GREENHALGH (1992), embora o diferencial convolucional possa ser truncado para implementação prática, sendo assim considerado um projeto de Filtro de Resposta Impulsiva Finita (RIF), se uma janela retangular for usada para esse truncamento, o fenômeno de Gibbs (oscilações do espectro de amplitude de um filtro nas proximidades da região truncada)(BRACEWELL, 1986) fará com que o operador diferencial RIF se torne impraticável.

Pode-se reduzir esse fenômeno e obter filtros mais curtos, utilizando funções janela que possuam característica cônica com um suave decréscimo em direção a zero nas extremidades. Estas janelas fazem com que as pequenas oscilações em torno da amplitude nula sejam zeradas, reduzindo assim o fenômeno de Gibbs. O tipo de janela utilizada e o comprimento do truncamento determinam uma importante característica espectral para o operador diferencial, ajudando assim a determinar uma resposta espectral da derivada (ZHOU e GREENHALGH, 1992).

Como demonstrado em CHU e STOFFA (2012) os *Stencils* de DF são versões truncadas das Equações (2.19), (2.20) e (2.21). Sendo que para $N + 1$ pontos do *Stencil*, onde N continua sendo um número par, estas fórmulas podem ser reescritas como:

$$\left. \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{n=-N/2; n \neq 0}^{N/2} \left[-\frac{2}{n^2} \cos(n\pi) w(n) \right] f(n\Delta x), \quad (2.22)$$

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=-N/2; n \neq 0}^{N/2} \left[-\frac{1}{n} \cos(n\pi) w(n) \right] f(n\Delta x), \quad (2.23)$$

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=\frac{\Delta x}{2}} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=1-N/2}^{N/2} \left\{ -\frac{1}{\pi} \frac{\sin \left[\left(\frac{1}{2} - n \right) \pi \right]}{\left(\frac{1}{2} - n \right)^2} w(n) \right\} f(n\Delta x), \quad (2.24)$$

onde $w(n)$ é chamada de função janela (*window function*).

Reportando-se às Equações (2.1) e (2.4), apresenta-se outra forma de calcular os coeficientes das fórmulas de DF (CHU e STOFFA, 2012):

$$c_n = -\frac{2}{n^2} \cos(n\pi)w(n), \quad (2.25)$$

$$b_n = -\frac{1}{n} \cos(n\pi)w(n), \quad (2.26)$$

para $n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{N}{2}$. Como $c_{-n} = c_n$ e $b_{-n} = -b_n$, então para $n = 0$ resulta que

$$c_0 = -\sum_{k=1}^{N/2} (c_{-k} + c_k), \quad (2.27)$$

$$b_0 = -\sum_{k=1}^{N/2} (b_{-k} + b_k) \equiv 0. \quad (2.28)$$

A função janela que faz com que os coeficientes obtidos através das Equações (2.25) e (2.26) sejam os mesmos daqueles obtidos através da série de Taylor (Equações (2.1) e (2.4)) é chamada de *scaled binomial window* e tem a seguinte expressão:

$$w(n) = \frac{\binom{N}{\frac{N}{2}+n}}{\binom{N}{\frac{N}{2}}}. \quad (2.29)$$

No caso da derivada primeira para a malha intercalada (ver Equação (2.5)), tem-se

$$s_n = -\frac{1}{\pi} \frac{\sin\left[\left(\frac{1}{2} - n\right)\pi\right]}{\left(\frac{1}{2} - n\right)^2} w(n), \quad (2.30)$$

onde $n = 1 - \frac{N}{2}, 2 - \frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$ e $w(n)$ é dado por:

$$w(n) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{para } N = 2 \\ \frac{N-1}{2^{2N-3}} \binom{N-3}{\frac{N}{2}-1} \binom{N-1}{\frac{N}{2}-1+n} \pi & \text{para } N > 2 \end{cases}. \quad (2.31)$$

A utilização desta função janela permite, em um mesmo código, fazer mudanças na ordem de precisão do operador e no tamanho do espaçamento da malha por direção em cada execução através dos operadores de DF descritos nas Equações (2.22) a (2.24), permitindo assim uma maior flexibilidade para a realização da modelagem e da migração de dados sísmico.

2.4 Melhoria na Propriedade de Dispersão

Na seção anterior, 2.3, foi apresentada um procedimento geral e mais simples de obter os coeficientes do operador de DF, para qualquer ordem de precisão. E como esses coeficientes têm os mesmos valores daqueles obtidos através da expansão da série de Taylor, o operador convolucional (2.22) a (2.24) mantém as mesmas vantagens do operador convencional (2.1), (2.4) e (2.5). Este, no entanto, ainda apresenta o mesmo problema de precisão do operador de DF convencional. Ambos preservam boa precisão para baixos números de onda, mas não para os mais elevados. Caso seja utilizado um operador de ordem reduzida, como o de quarta ordem, deve-se empregar uma malha muito refinada a fim de não haver problemas de dispersão numérica.

Uma solução para o problema mencionado é a adoção de outras funções janela $w(n)$, que permitam melhorar a precisão sem aumentar a ordem do operador, isto é, sem utilizar mais pontos na discretização. Sendo assim, o objetivo da próxima seção é empregar o operador convolucional para aumentar a precisão sem implicar no aumento do custo computacional, o que não é possível através do operador convencional.

2.4.1 Funções Janela

Uma variedade de funções janela podem ser empregadas na construção de um filtro FIR (ROBERTS e MULLIS, 1987). No presente trabalho, tal construção é feita no domínio espacial, onde a filtragem é dada através da convolução do sinal de entrada (campo de onda) com um diferencial convolucional.

A função janela comumente usada na construção desse filtro é a função Gaussiana (*Gaussian window*) (CHU e STOFFA, 2012):

$$w(n) = e^{-\kappa n^2}. \quad (2.32)$$

Os autores IGEL *et al.* (1995) utilizaram esta função a fim de desenvolver um operador de derivada primeira para uma malha intercalada. Eles empregaram o operador na modelagem da Equação da onda elástica isotrópica e propuseram utilizar $\kappa = 0.2$ na discretização do operador de oitava ordem, enquanto que CHU *et al.* (2009) utilizaram considerando anisotropia total.

Outra função janela, a *Generalized-powered Hanning*, foi utilizada no trabalho de ZHOU e GREENHALGH (1992) para gerar um operador de derivada segunda aplicado na modelagem acústica.

Essa função é expressa por:

$$w(n) = \left[2\alpha - 1 + 2(1 - \alpha) \cos^2 \left(\frac{\pi n}{N + 4} \right) \right]^{\frac{\xi}{2}}, \quad (2.33)$$

onde α e ξ determinam a forma da janela. Os autores sugeriam utilizar $\alpha = 0.54$ e $\xi = 6.0$ para a discretização do operador de derivada segunda de oitava ordem. No caso em que α ($0.5 \leq \alpha \leq 1$) é constante e ξ é variável tem-se uma variedade de funções janela que podem ser consideradas.

No trabalho de ZHOU *et al.* (1993) foi empregada a janela *Powered Hanning* (*Powered Hanning Window*) que é um caso particular da função acima quando $\alpha = 0.5$. Sendo assim, a função (2.33) toma a seguinte forma:

$$w(n) = \left[\cos^2 \left(\frac{\pi n}{N + 4} \right) \right]^{\sigma}. \quad (2.34)$$

Neste caso, os autores utilizaram esta janela para modelar a Equação acústica da onda com densidade variável e o valor do parâmetro σ sugerido, para discretização do operador de oitava ordem, foi quatro. Entretanto, a melhoria no resultado foi conseguida juntamente com a aplicação de um tratamento de borda, o qual se fez uma modificação no comprimento do operador próximo a região do contorno reduzindo os problemas de dispersão.

Conforme descrito na seção anterior, as funções *Binominal Window*, expressas em (2.29) e (2.31), obtém os mesmos coeficientes convencionais de Taylor. CHU e STOFFA (2012) desenvolveram uma alternativa, utilizando a *Binominal Window*, que pode gerar coeficientes para o operador com melhor propriedade de dispersão. Estas novas versões são expressas como segue:

$$w(n) = \frac{\binom{N+M}{\frac{N+M}{2}+n}}{\binom{N+M}{\frac{N+M}{2}}}, \quad (2.35)$$

$$w(n) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{para } N = 2 \\ \frac{N+M-1}{2^{2(N+M)-3}} \binom{N+M-3}{\frac{N+M}{2}-1} \binom{N+M-1}{\frac{N+M}{2}-1+n} \pi & \text{para } N > 2 \end{cases}, \quad (2.36)$$

onde M é um número par, maior que zero e chamado de parâmetro de otimização.

As funções janela têm seus parâmetros alterados quando emprega-se um operador com diferente número de pontos na discretização. Destaca-se que as funções (2.32) a (2.36) são dependentes da ordem de precisão N utilizada na discretização do operador como será visto mais a frente.

2.4.2 Erro Espectral na Malha Simples

Com o intuito de avaliar a melhoria na propriedade de dispersão para malha simples e estimar os parâmetros das funções janela, foram construídos gráficos de análise do erro espectral da derivada segunda para diferentes ordens de precisão, através das diferentes funções janela. Essa avaliação permitiu estimar os parâmetros para cada função buscando diminuir o erro numérico proveniente da aproximação da derivada, conforme mencionado na seção anterior.

A fórmula do erro espectral absoluto origina-se da Equação (2.2), e são reescritas em função do número de onda normalizado pelo número de onda de Nyquist ($\frac{k}{k_{xn}}$), ou seja:

$$Erro\left(\frac{k_x}{k_{xn}}\right) = -\left[c_0 + 2\sum_{n=1}^{N/2} c_n \cos\left(\frac{k_x}{k_{xn}}n\pi\right)\right] - \left(\frac{k_x}{k_{xn}}\pi\right)^2. \quad (2.37)$$

A ideia básica é a de ampliar a cobertura do número de onda considerando um determinado erro de limitação (HOLBERG, 1987), aumentando desta forma a precisão da discretização da derivada. As limitações do erro, amplamente utilizadas de 0,0003 até 0,03 conforme HOLBERG (1987) sugere, são grandes para a modelagem de alta precisão. É por isso que geralmente encontram-se grandes melhorias nas análises teóricas, no entanto não são bem sucedidas nas aplicações práticas (ZHANG e YAO, 2013).

Conforme proposto por ZHANG e YAO (2013) o erro espectral do operador será limitado nesse trabalho em 0,1%, o menor encontrado na literatura estando de perfeito acordo entre as análises teóricas e experimentos numéricos.

A análise para a derivada segunda, utilizando operadores convolucionais com precisão de segunda ordem, reproduziu o mesmo erro espectral que os coeficientes convencionais (Figura 2.2).

Para a precisão de quarta ordem, somente a *Generalized-powered Hanning Window* apresentou resultado dentro da faixa de erro, no entanto a precisão foi praticamente a mesma da convencional (Figura 2.3). Na análise de precisão da oitava ordem, além da *Generalized-powered Hanning Window* a *Powered Hanning Window* também apresentou resultado dentro do limite de erro, porém não apresentou melhora de precisão (Figura 2.4).

A precisão encontrada do operador convolucional para expansão de décima ordem, foi maior que a expansão convencional para quase todas as funções janela (Figura 2.5). As curvas do erro absoluto para os coeficientes convencionais estão mais próximas de zero, distanciando gradualmente com o aumento do número de onda. Já as curvas do erro absoluto para os coeficientes convolucionais, oscilam várias vezes dentro do limite fixo do erro e posteriormente afastam-se dessa limitação (Figura

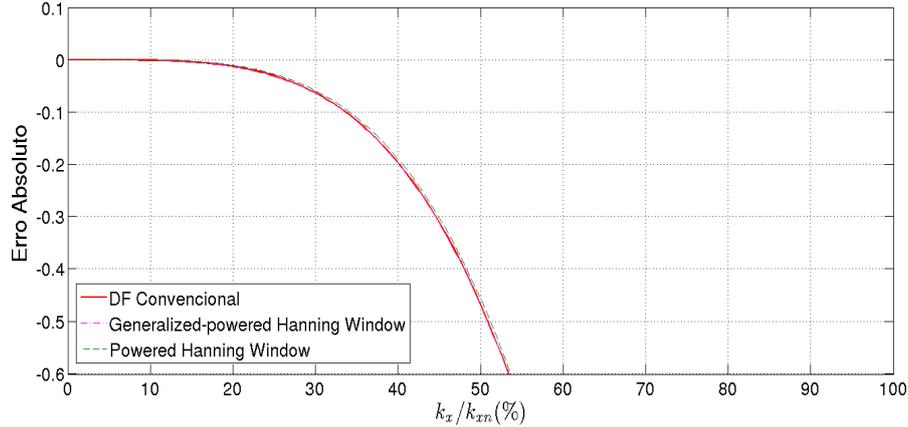


Figura 2.2: Comparação do erro absoluto dos operadores da derivada segunda convencional com os convolucionais para 2^a ordem no domínio do número de onda. Com $k = 0.19309$, $\alpha = 0.54$, $\xi = 5.3$ e $\sigma = 4.78$

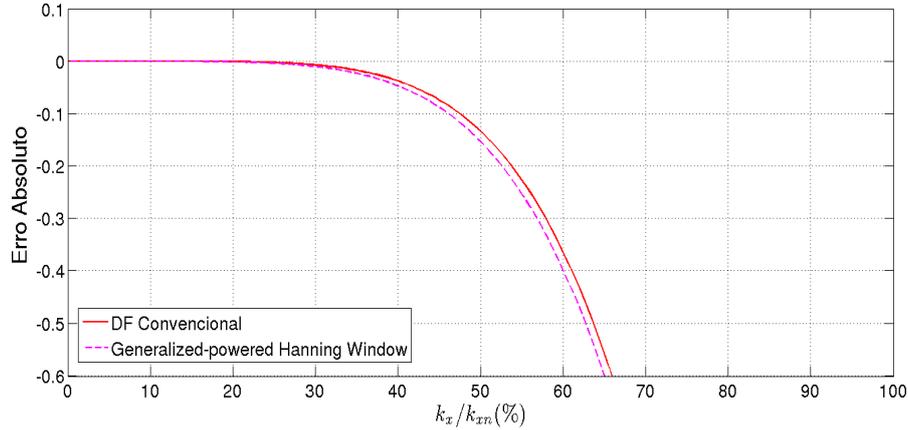


Figura 2.3: Comparação do erro absoluto dos operadores da derivada segunda convencional com os convolucionais para 4^a ordem no domínio do número de onda. Com $\alpha = 0.49$ e $\xi = 5.2$

2.5(b)).

Mesmo tendo um comportamento oscilatório, os operadores convolucionais estão sempre dentro de uma faixa de erro de $[-0.0001, 0.0001]$. Com isso, os coeficientes de décima ordem, estando abaixo de um limite permitido, são eficazes na obtenção de uma gama mais ampla de número de ondas precisas e proporcionam uma redução das dispersões numéricas. Porém, apesar do resultado ter melhorado, ainda está próximo da precisão obtida pelos coeficientes convencionais. Uma forma de aumentar essa diferença é utilizar ordens mais elevadas (Figuras 2.7 e 2.6).

O resultado para os operadores de derivada segunda convolucional para décima segunda ordem (Figura 2.6) apresentou uma melhora mais significativa em comparação ao operador de décima ordem. A Figura 2.6(a) apresenta uma visão

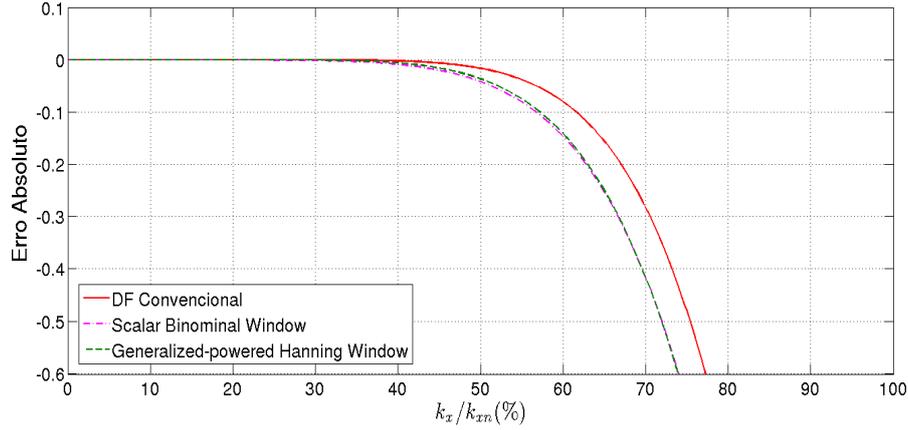
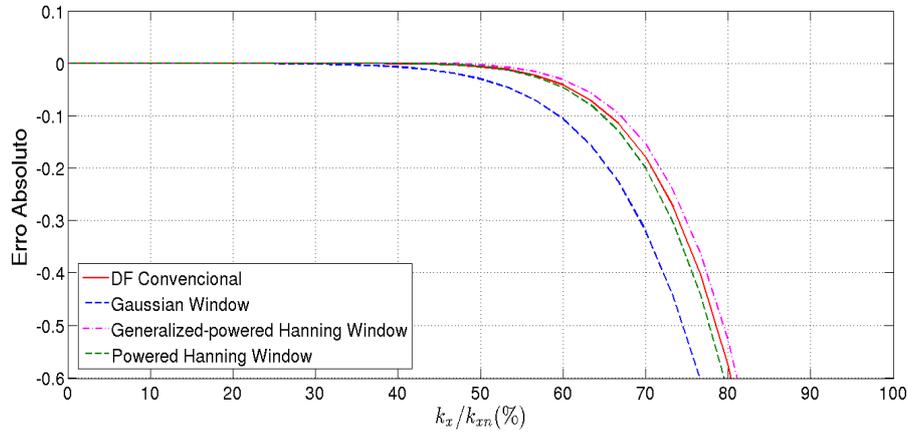
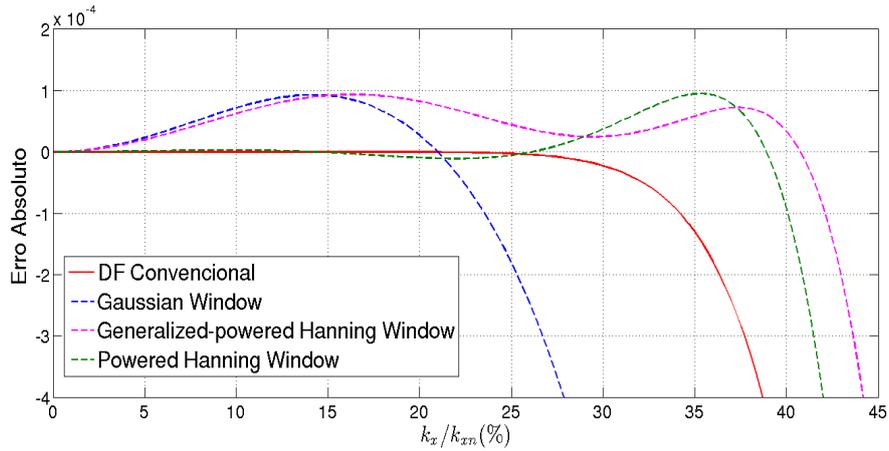


Figura 2.4: Comparação do erro absoluto dos operadores da derivada segunda convencional com os convolucionais para 8ª ordem no domínio do número de onda. Com $M = 0$, $\alpha = 0.57$ e $\xi = 9.0$ e $\sigma = 7.8$.



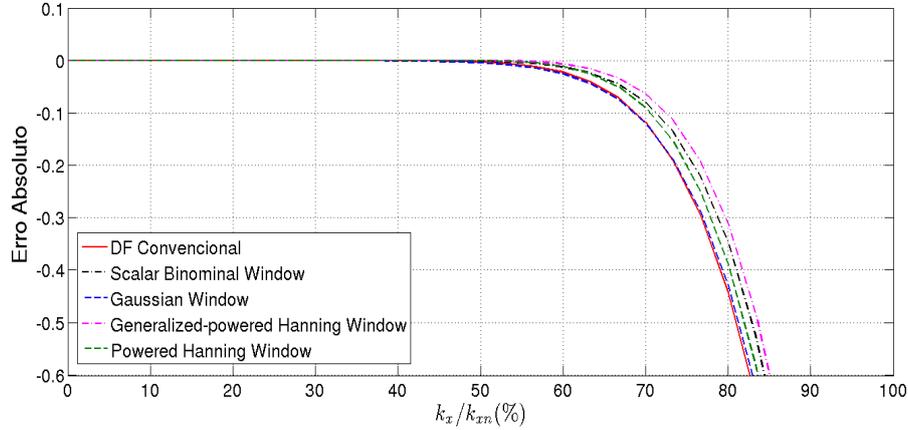
(a) Visão geral do erro absoluto dentro da faixa de $(-0.4, 0.1)$.



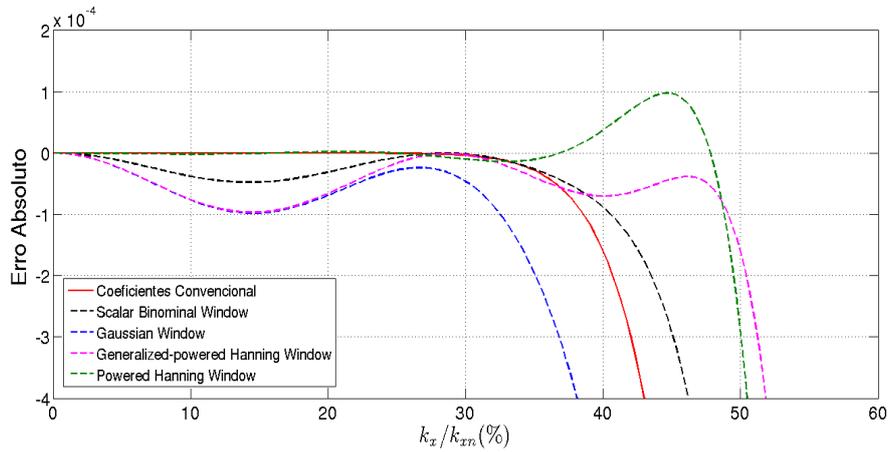
(b) Visão ampliada do erro absoluto dentro da faixa de $(-0.0004, 0.0002)$.

Figura 2.5: Comparação do erro absoluto dos operadores da derivada segunda convencional com os convolucionais para 10ª ordem no domínio do número de onda. Com $M = 2$, $k = 0.207$, $\alpha = 0.54$, $\xi = 7.4$ e $\sigma = 7.6$.

mais geral que evidência uma maior cobertura do número de ondas para os coeficientes gerados pela *Generalized-powered Hanning Window*, utilizando os parâmetros $\alpha = 0.55$ e $\xi = 7.25$



(a) Visão geral do erro absoluto dentro da faixa de $(-0.4, 0.1)$.



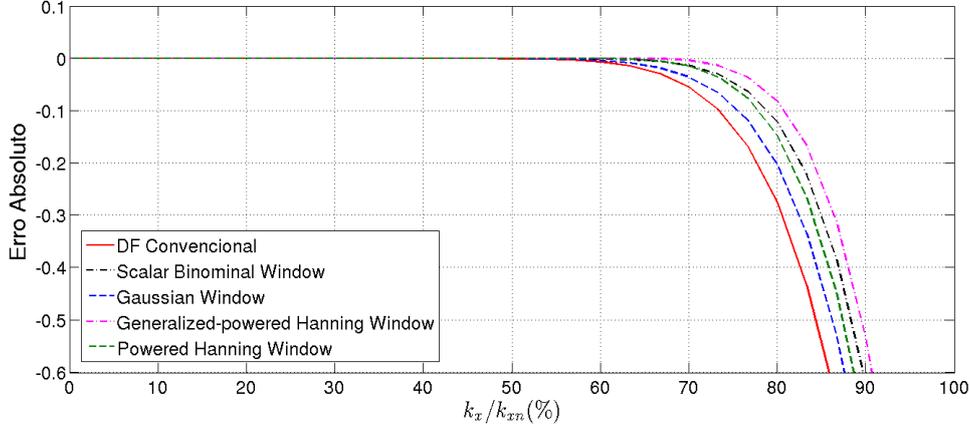
(b) Visão ampliada do erro absoluto dentro da faixa de $(-0.0004, 0.0002)$.

Figura 2.6: Comparação do erro absoluto dos operadores da derivada segunda convencional com os convolucionais para 12ª ordem no domínio do número de onda. Com $M = 2$, $k = 0.15$, $\alpha = 0.55$, $\xi = 7.25$ e $\sigma = 7.3$.

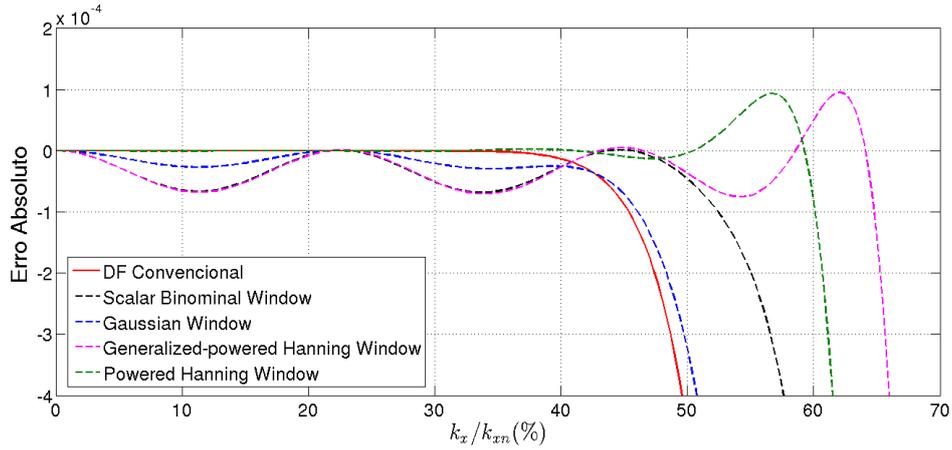
O operador de décima segunda ordem não apresentou melhora para todas as funções janela. A fim de buscar tal eficiência, analisou-se os operadores de décima sexta ordem (Figura 2.7) e trigésima segunda ordem (Figura 2.8). O operador de décima sexta ordem apresentou resultados eficientes para todas as funções janela tendo a *Generalized-powered Hanning Window*, utilizando $\alpha = 0.54$ e $\xi = 6.2$, o melhor resultado para altos números de ondas, dentro do limite do erro permitido (Figura 2.8(b)).

A busca por componentes de altas frequências são essenciais para alcançar altas resoluções, sendo uma necessidade muito importante para redução da dispersão numérica referente ao MDF (LIU e SEN, 2009b). O resultado do operador de tri-

gésima segunda ordem reforça a ideia de aumentar a ordem para obter uma melhor precisão, porém deve-se lembrar que o *Stencil* desse operador emprega 33 pontos e o de décima sexta ordem emprega 17, o que aumentará o custo computacional.



(a) Visão geral do erro absoluto dentro da faixa de $(-2, 0.5)$.

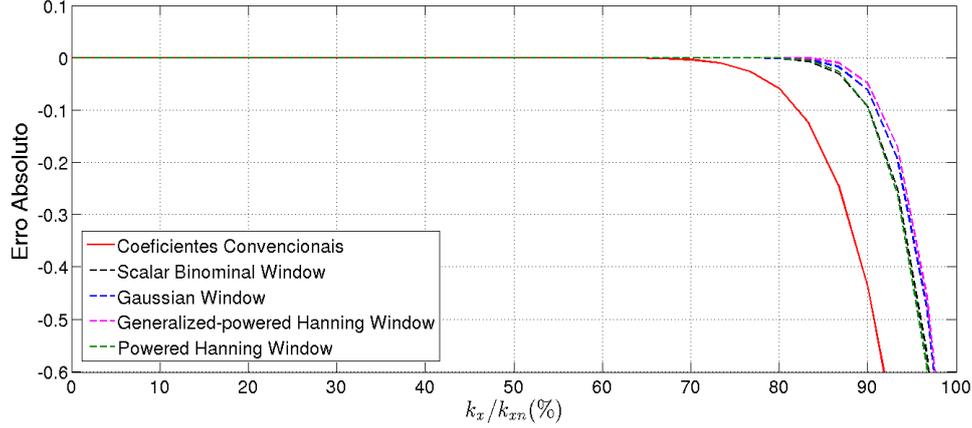


(b) Visão ampliada do erro absoluto dentro da faixa de $(-0.0004, 0.0002)$.

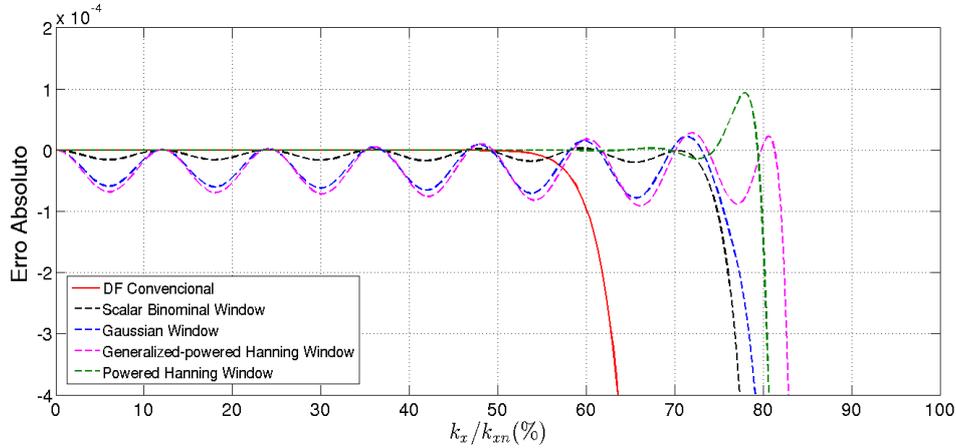
Figura 2.7: Comparação do erro absoluto do operador convencional com o convolucional para 16ª ordem no domínio do número de onda. Com $M = 16$, $k = 0.15$, $\alpha = 0.55$, $\xi = 7.25$ e $\sigma = 7.3$.

Os parâmetros envolvidos em cada uma dessas funções janela são difíceis de determinar e ao mesmo tempo eles necessitam de serem manuseados com cautela, pois podem afetar significativamente o resultado final (ZHANG e YAO, 2013). Uma saída para contornar esse problema é utilizar técnicas de otimização para minimizar o erro de dispersão (Fórmula (2.37)), a fim de obter operadores de DF otimizados (CHU e STOFFA, 2012).

Uma recente publicação apresentou uma redução da dispersão numérica do MDF, na presença de componentes de altas frequências. ZHANG e YAO (2013) otimizaram os coeficientes do operador através da maximização da convergência do número de onda, dado uma limitação do erro. Foi examinado o pico absoluto do erro



(a) Visão geral do erro absoluto dentro da faixa de $(-0.4, 0.1)$.



(b) Visão ampliada do erro absoluto dentro da faixa de $(-0.0004, 0.0002)$.

Figura 2.8: Comparação do erro absoluto entre o operador convencional e convolucional de 32ª ordem. Com $M = 24$, $k = 0.15$, $\alpha = 0.55$, $\xi = 7.25$ e $\sigma = 7.3$.

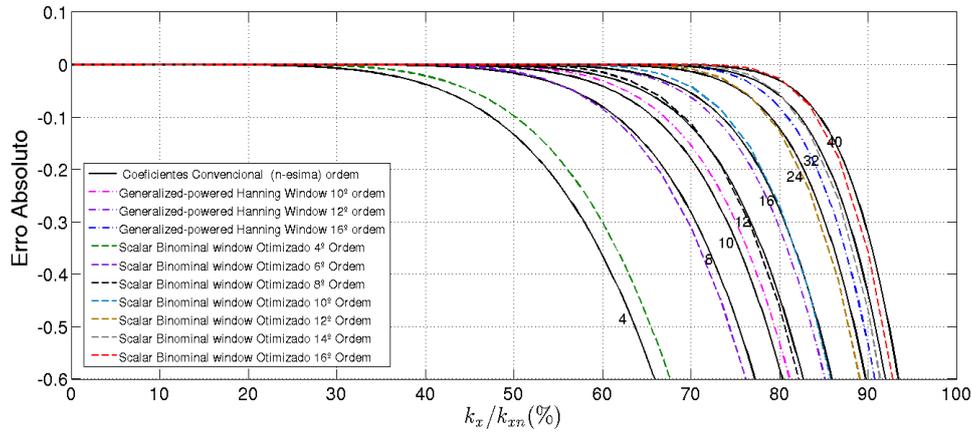
entre o operador otimizado no domínio do número de onda e no domínio do número de onda analítico. Para gerar os coeficientes otimizados, foi utilizado o algoritmo *Simulated Annealing (SA)*. Tais coeficientes são listados na Tabela 2.4.

De posse dos novos coeficientes, compara-se o erro absoluto destes com os melhores coeficientes convolucionais encontrados através da utilização de diferentes funções janela, considerando também os coeficientes convencionais. Os coeficientes otimizados gerados pela *Scalar Binominal window* apresentaram maior precisão da 4ª à 16ª ordem, evidenciando uma precisão de 8ª ordem equivalente a de 12ª ordem convencional. Destaca-se também que a 12ª ordem teve precisão próxima da 24ª ordem convencional e a 16ª ordem obteve uma precisão maior que a 36ª ordem convencional (Figura 2.9).

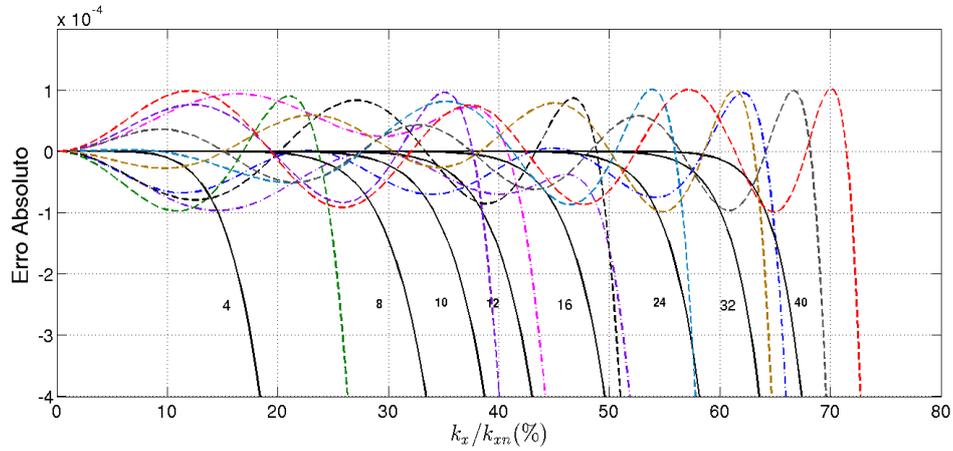
A curva do erro absoluto do operador otimizado tem um comportamento similar à curva do operador convolucional. Ela oscila dentro de certo limite afastando-se gradativamente desta limitação (Figura 2.9(b)).

Tabela 2.4: Coeficientes convolucional otimizado para operador DF, retirados de ZHANG e YAO (2013).

	4ª ordem	6ª ordem	8ª ordem	10ª ordem	12ª ordem	14ª ordem	16ª ordem
c_0	-2.55567466	-2.81952122	-2.97399944	-3.05450492	-3.12108522	-3.16275980	-3.18543410
c_1	1.37106192	1.57500756	1.70507669	1.77642739	1.83730507	1.87636137	1.89789462
c_2	-0.09322459	-0.18267338	-0.25861812	-0.30779013	-0.35408741	-0.38612121	-0.40456799
c_3		0.01742643	0.04577745	0.07115999	0.09988277	0.12263042	0.13676734
c_4			-0.00523630	-0.01422784	-0.02817135	-0.04190565	-0.05150324
c_5				0.00168305	0.00653900	0.01330243	0.01893502
c_6					-0.00092547	-0.00344731	-0.00619345
c_7						0.00055985	0.00159455
c_8							-0.00020980



(a) Visão geral do erro absoluto dentro da faixa de $(-0.6, 0.1)$.



(b) Visão ampliada do erro absoluto dentro da faixa de $(-0.0004, 0.0002)$.

Figura 2.9: Comparação do erro absoluto entre o operador convencional, convolucional e convolucional otimizado.

A formulação e as análises descritas e realizadas nesta seção podem facilmente ser aplicada para a derivada primeira da malha intercalada, para isso deve-se utilizar

a seguinte fórmula do erro espectral absoluto, proveniente da Equação 2.7:

$$Erro\left(\frac{k_x}{k_{xn}}\right) = 2 \sum_{n=1}^{N/2} s_n \sin\left[\left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{k_x}{k_{xn}}\pi\right)\right] - \left(\frac{k_x}{k_{xn}}\pi\right). \quad (2.38)$$

O esquema de otimização proposto por ZHANG e YAO (2013) pode ser estendido para o MDF intercalado, para obter um ganho na redução de dispersão numérica. O MDF intercalado empregado por VIRIEUX (1986) tem pouca dispersão comparado com o MDF convencional (ZHANG e YAO, 2013).

Capítulo 3

Modelagem Sísmica

Dentre os diversos métodos utilizados no processo de exploração geofísica de Petróleo e Gás, o Método Sísmico é considerado o mais importante. Tal método se baseia na propagação, em subsuperfície, de ondas sísmicas produzidas por fontes artificiais, e tem como principal objetivo delinear as estruturas geológicas da subsuperfície da Terra.

Na sísmica de exploração um pulso de energia mecânica é gerado por uma fonte artificial que se propaga pelas camadas geológicas onde são refletidas, refratadas e difratadas ao entrarem em contato com diferentes impedâncias acústicas (velocidade da onda sísmica \times densidade), retornando para a superfície onde as informações carregadas por elas são registradas pelos receptores. Os dados são processados por meio de softwares específicos onde são apresentados, por exemplo, sob a forma de sismogramas ou seção sísmica.

A modelagem sísmica é uma técnica para simular a propagação da onda no interior da Terra, seu objetivo consiste resumidamente segundo FICHMAN (2005) em:

- Avaliar as possibilidades e limitações do método sísmico;
- Otimizar os parâmetros de aquisição com base no interesse geológico;
- Gerar dados sísmicos sintéticos para a avaliação de novas metodologias de inversão e imageamento;
- Verificar quanto os modelos sintéticos honram os dados sísmicos de campo, na etapa de interpretação.

Neste trabalho, será utilizada a Equação Acústica da Onda para simular numericamente a propagação de ondas sísmicas no meio. Ressalta-se que sua utilização abrange apenas as ondas compressoriais, porém gera resultados satisfatórios em problemas geofísicos aplicados na indústria do petróleo e gás, com um menor

custo computacional em relação, por exemplo, à modelagem elástica (CARCIONE *et al.*, 2002).

A simulação numérica da onda tem sido uma ferramenta indispensável para compreensão da propagação de ondas sísmicas em meios geologicamente complexos, fornecendo eficientes soluções do campo de ondas especialmente para a migração e para Inversão Completa do Campo de Ondas (CHU e STOFFA, 2012). Um método que tem sido largamente usado nesta solução é o MDF, devido a sua fácil implementação e sua eficiência em meios heterogêneos (ZHANG e YAO, 2013).

Nesse capítulo será apresentada a discretização da equação acústica da onda que transformará o modelo matemático contínuo em um modelo matemático discreto através de uma malha de pontos, para realizar tal discretização será utilizado o MDF. Também será apresentada a formulação para obtenção dos parâmetros de dispersão e estabilidade seguindo uma maneira eficiente e precisa.

Na seção anterior, o emprego da função *Scaled Binominal Window* otimizada no operador diferencial convolucional, apresentou maior precisão frente as demais. Por isso, nesta seção será utilizado os coeficientes otimizados.

3.1 Fórmula de Modelagem Discreta da Equação Acústica da Onda

A Equação Acústica da Onda pode ser obtida por meio da aplicação da 2ª lei de Newton e uma relação constitutiva adequada (Apêndice A). Ela é responsável por simular a propagação das ondas sísmicas. Tal equação, considerando meios com densidade constante, tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{C(x, z)^2} \frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial t^2} + f(t)\delta(x - x_f)\delta(z - z_f). \quad (3.1)$$

onde $P(x, z, t)$ é o campo de pressão da onda, x e z são as coordenadas espacial, t é a coordenada temporal, $C(x, z)$ é a velocidade de propagação da onda no meio, $f(t)$ é o termo fonte, δ é o operador Delta de Dirac e x_f e z_f representam ponto de aplicação da fonte sísmica na direção.

Com base nas Equações (2.12 e 2.18), pode-se reescrever a Equação 3.1 como:

$$d_2(x) * P(x, z, t) + d_2(z) * P(x, z, t) = \frac{1}{C(x, z)^2} \frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial t^2} + f(t)\delta(x - x_f)\delta(z - z_f). \quad (3.2)$$

onde novamente “*” é o símbolo de convolução.

Representando a Equação (3.2) na sua forma discreta, com Δx^2 , $\Delta z^2, \Delta t^2$, f^n

e δ definidos na Apêndice A, sendo $C_{i,j}^2$ a matriz velocidade de propagação do meio e c os coeficientes do MDF, tem-se:

$$\frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial t^2} = C_{i,j}^2 \left[\frac{1}{\Delta x^2} \sum_{mi=-\frac{N}{2}}^{N/2} c_{mi} P_{i-mi,j}^{\bar{n}} + \frac{1}{\Delta z^2} \sum_{mj=-\frac{N}{2}}^{N/2} c_{mj} P_{i,j-mj}^{\bar{n}} \right] - f^{\bar{n}} \delta(i - i_f) \delta(j - j_f). \quad (3.3)$$

A derivada em relação ao tempo é discretizada normalmente utilizando o operador de DF convencional de segunda ordem. Incorporando isto à Equação e usando a simetria do diferenciador convolucional do lado direito, tem-se explicitamente o campo de ondas da seguinte forma (ZHOU e GREENHALGH, 1992):

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{\bar{n}+1} &= C_{i,j}^2 \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{\Delta x^2} c_{mi=0} + \frac{1}{\Delta z^2} c_{mj=0} \right) P_{i,j}^{\bar{n}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{mi=1}^{N/2} c_{mi} (P_{i-mi,j}^{\bar{n}} + P_{i+mi,j}^{\bar{n}}) + \frac{1}{\Delta z^2} \sum_{mj=1}^{N/2} c_{mj} (P_{i,j-mj}^{\bar{n}} + P_{i,mj+1}^{\bar{n}}) \right] \\ &\quad + 2P_{i,j}^{\bar{n}} - P_{i,j}^{\bar{n}-1} - f^{\bar{n}} \delta(i - i_f) \delta(j - j_f). \end{aligned} \quad (3.4)$$

A formulação, utilizando o operador diferencial convolucional, da modelagem discreta da Equação Elástica da Onda conforme o esquema empregado por VIRIEUX (1986) está descrito na Apêndice C.

3.2 Análise de Dispersão e Estabilidade

Na discretização da Equação da Onda por meio de operadores de DF, Equação (3.4), ocorrerá um erro na velocidade de fase e de grupo pois ambas passam a depender do espaçamento da malha, da frequência do sinal e do ângulo de propagação, FARIA (1986). No caso da Equação da Onda esse erro aparece sobre a forma de dispersão numérica.

Para determinar a relação de dispersão, pode-se considerar a expressão discreta da propagação de uma onda plana harmônica em um meio infinito e homogêneo:

$$p_{x,z}^t = e^{i[k_x(x+ih)+k_z(x+jh)-\omega(t+n\Delta t)]}, \quad (3.5)$$

sendo ω é a frequência angular, $i = \sqrt{-1}$ e k_x, k_z são respectivamente os números de onda nas direções x e z, expressos por:

$$k_x = k \cos \theta \quad e \quad k_z = k \sin \theta. \quad (3.6)$$

onde k é o módulo do vetor número de onda e θ o ângulo entre a direção vertical (eixo z) e a direção da propagação da onda Figura 3.1.

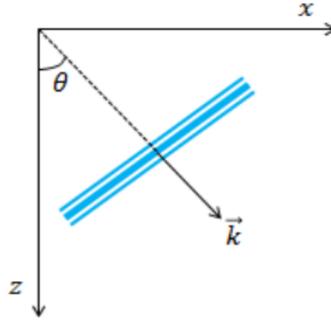


Figura 3.1: Direção de Propagação da onda plana. Retirada de DUARTE (2012)

Substituindo a Equação (3.5) na Equação (3.4) e após algumas manipulações algébricas obtém-se a seguinte relação para a velocidade de fase (LIU e SEN, 2009a).

$$\frac{C_{FD}}{C} = \frac{2}{\mu kh} \text{sen}^{-1} \left\{ \mu \sqrt{\sum_{m=1}^{N/2} c_m \left[\text{sen}^2 \left(\frac{mkh \text{sen}\theta}{2} \right) + \text{sen}^2 \left(\frac{mkh \text{cos}\theta}{2} \right) \right]} \right\}, \quad (3.7)$$

em que C é a velocidade da onda no meio contínuo, C_{FD} é a velocidade de fase da onda sobre o meio discretizado, c_m são os coeficientes do *Stencil* do operador DF, N corresponde ao número de expansão da ordem do operador, h é espaçamento da malha e μ é o número de Courant-Friendrichs-Lewy (CFL).

O valor de μ controla a estabilidade do esquema de DF e pode ser definido pela análise dos autovalores onde o fator de estabilidade s para modelagem da equação acústica da onda 2D é dada por (LIU e SEN, 2009a):

$$\mu \leq s = \frac{1}{\sqrt{2 \sum_{m=1}^{N/2} c_m}}. \quad (3.8)$$

sendo c_m os coeficientes dos operadores de diferenças finitas definido na Equação (2.25). Em LIU e SEN (2009a) foi demonstrado que a inequação acima é satisfeita para $\mu \leq 1$.

Fixando o valor de μ , a Equação (3.7) permite avaliar o erro da velocidade de fase da onda discretizada. Uma maneira usualmente utilizada para determinar a dispersão relativa à velocidade de fase, consiste em utilizar a função $\frac{1}{G}$ definida como:

$$\frac{1}{G} = \frac{h}{\lambda} = \frac{kh}{2\pi}, \quad (3.9)$$

sendo ele o parâmetro utilizado para examinar a natureza dispersiva da forma da

onda considerando a velocidade de fase, o que permite determinar o menor número de pontos por comprimento de onda.

A Equação (3.7) relaciona a velocidade de fase normalizada com o intervalo de espaçamento da malha h através da variável G . Se o processo de discretização fosse analítico, o lado direito da Equação (3.7) seria igual a 1.0 para todos os valores de h . Qualquer desvio de 1.0 se deve ao erro causado pela discretização da equação da onda. Tal erro, conforme mencionado no início da seção, é responsável pela dispersão numérica.

A análise da velocidade de fase normalizada representada pela Equação (3.7), depende do parâmetro μ , que tem seu valor máximo estimado pela Equação (3.8). No entanto, ao escolher tal parâmetro, a curva da velocidade de fase normalizada foi gerada dentro do intervalo $[-0,001; 0,001]$, de forma a garantir a redução da presença de dispersão numérica.

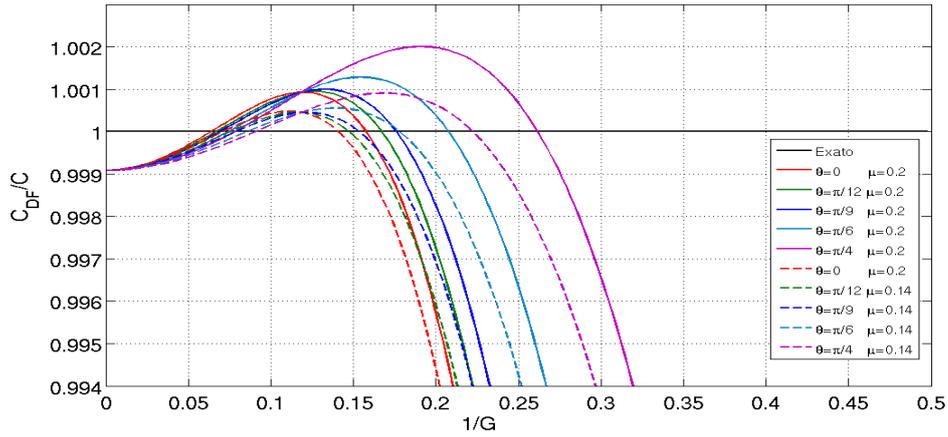
Considerando essa restrição, na Figura 3.2(a) o comportamento da curva está dentro do intervalo somente para $\mu = 0.14$, considerando todos os ângulos abaixo de $\frac{\pi}{4}$. Já para $\mu = 0.2$, a curva esteve dentro do limite de erro somente para $\theta \leq \frac{\pi}{9}$. Sendo assim, deve-se escolher $\mu = 0.14$ para garantir que não haja dispersão.

De uma forma geral, segundo JIN *et al.* (2013), pode-se definir quatro maneiras de reduzir a dispersão na modelagem de reflexão sísmica em aquisições marinha.

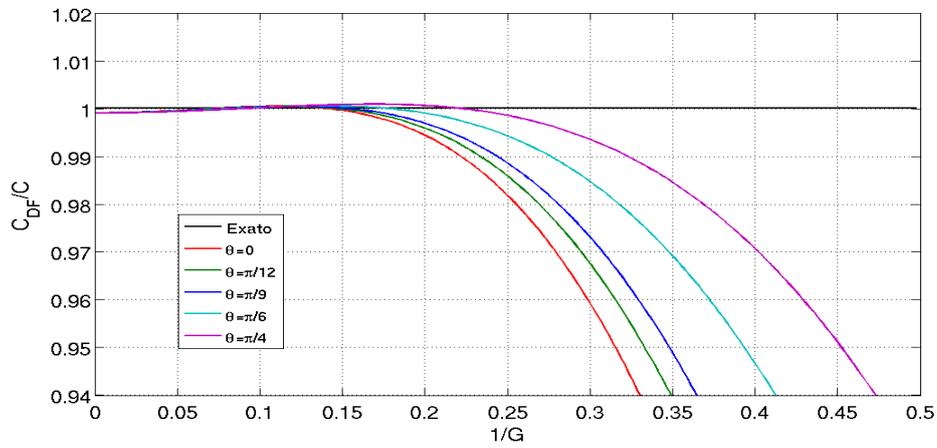
A primeira consiste no decréscimo do parâmetro $\frac{1}{G}$ com um largo comprimento de onda λ ou um pequeno h . Para um dado modelo, um longo comprimento de onda reduzirá a resolução do dado e um pequeno espaçamento da malha aumentará, de forma exponencial o custo computacional, especialmente para a modelagem 3D. O ideal é estimar o maior $\frac{1}{G}$ possível para ter um maior h e um menor λ .

A segunda forma é escolher o ângulo da direção de propagação da onda entre 0° e 45° , onde a dispersão é maior quando a propagação é paralela ao grid ($\theta = 0^\circ$). Esta variação avalia a anisotropia numérica, que para CUNHA (1999), é similar a anisotropia física real. Tal avaliação pode ser observada nas Figuras (3.2(a) - 3.5). Vale ressaltar que esses ângulos satisfazem a faixa de interesse da propagação de ondas sísmica marinha. A terceira maneira de avaliar a dispersão numérica é decrescer a constante μ utilizando um largo intervalo temporal ou um pequeno espaçamento da malha, conforme Figuras 3.6 a 3.9. A quarta maneira é melhorar a precisão espacial utilizando uma alta ordem para os operadores de diferenças finitas, o que pode ser constatado na Figura 3.10.

Na Figura 3.10, nota-se, por exemplo, que o parâmetro G para a 16ª ordem do operador otimizado é bem próximo do parâmetro para a 40ª ordem do operador convencional, estando de perfeito acordo com as análises do espectro do operador de diferenças finitas realizadas no capítulo anterior. Através dessas observações pode-se concluir que as altas ordens são necessárias para reduzir a dispersão e o custo



(a) Avaliação da velocidade de fase para aproximação de 4º ordem



(b) Avaliação da velocidade de fase para aproximação de 4º ordem, com $\mu = 0.14$

Figura 3.2: Avaliação da velocidade de fase para aproximação de 4º ordem considerando ângulos entre 0º à 45º.

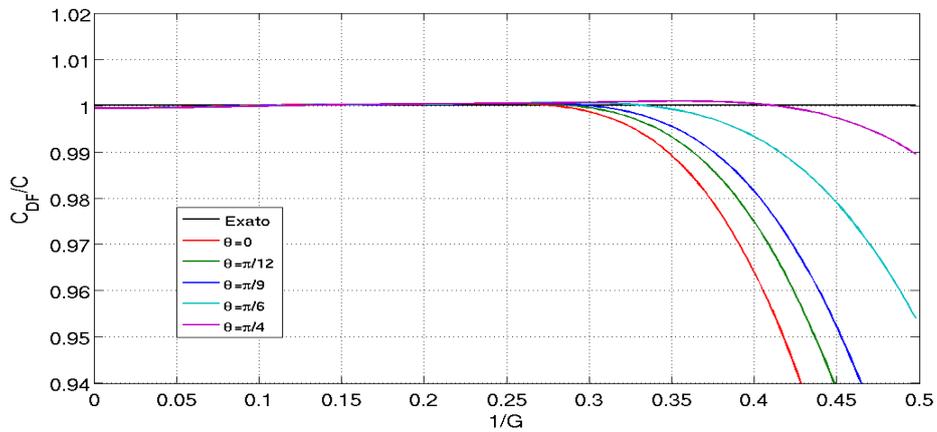


Figura 3.3: Avaliação da velocidade de fase para aproximação de 8º ordem, com $\mu = 0.07$.

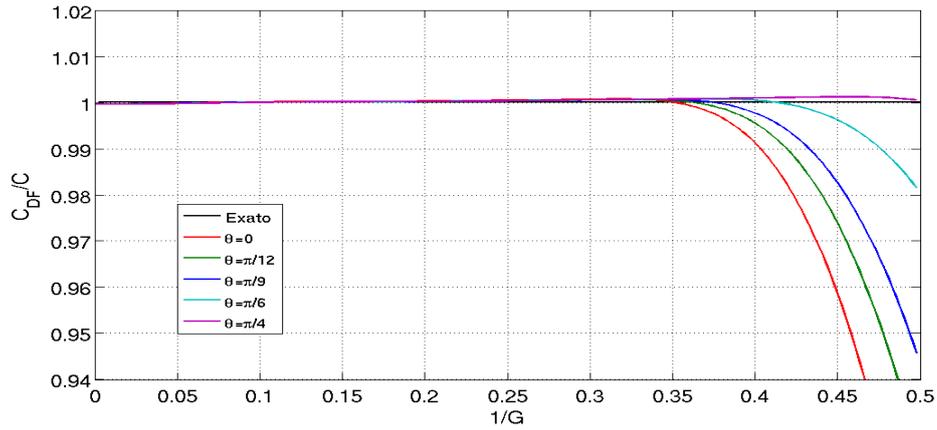


Figura 3.4: Avaliação da velocidade de fase para aproximação de 12º ordem, com $\mu = 0.061$.

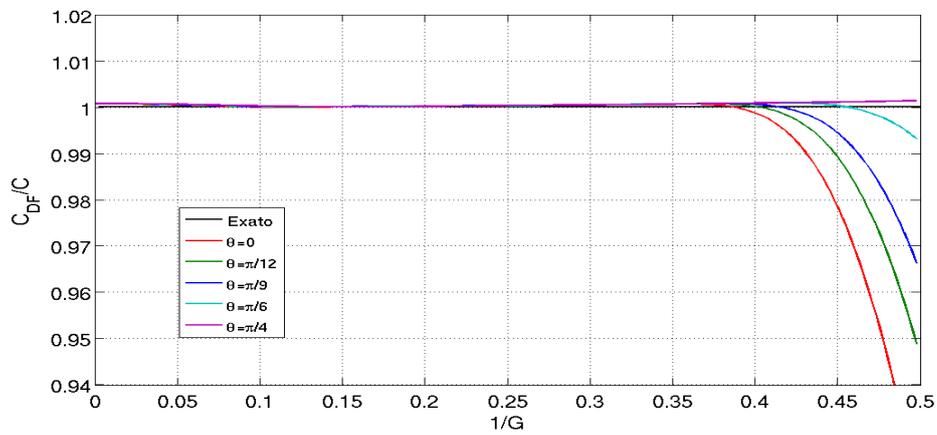


Figura 3.5: Avaliação da velocidade de fase para aproximação de 16º ordem, com $\mu = 0.058$.

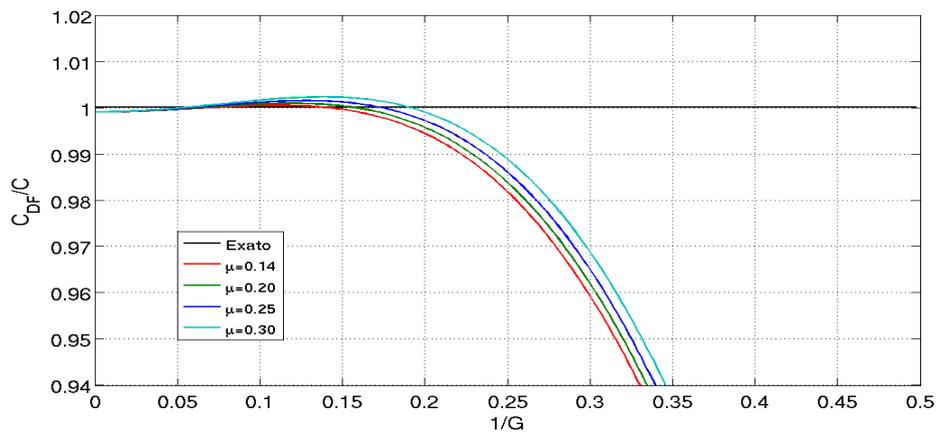


Figura 3.6: Avaliação da dispersão numérica para modelagem da equação acústica da onda 2D pelo MDF com aproximação de 4º ordem, considerando $\theta = 0^\circ$.

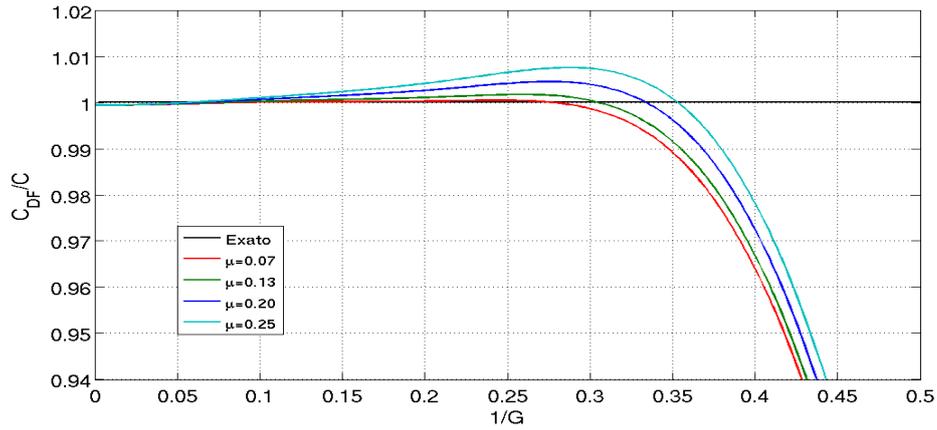


Figura 3.7: Avaliação da dispersão numérica para modelagem da equação acústica da onda 2D pelo MDF com aproximação de 8º ordem, considerando $\theta = 0^\circ$.

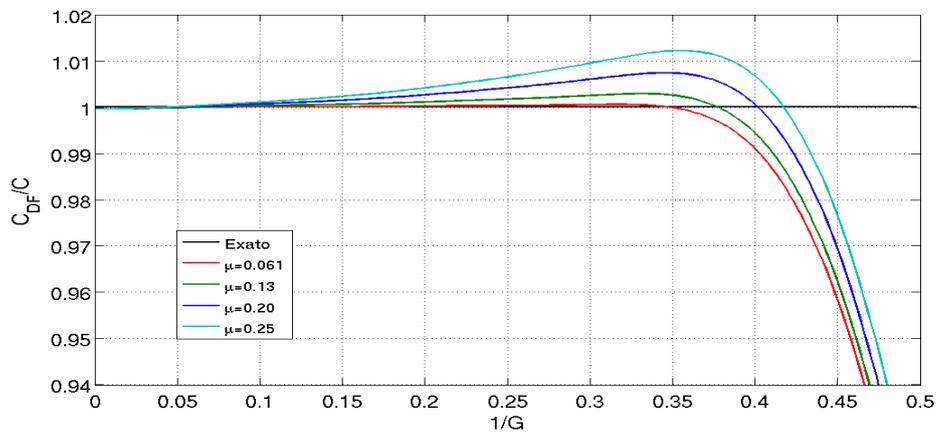


Figura 3.8: Avaliação da dispersão numérica para modelagem da equação acústica da onda 2D pelo MDF com aproximação de 12º ordem, considerando $\theta = 0^\circ$.

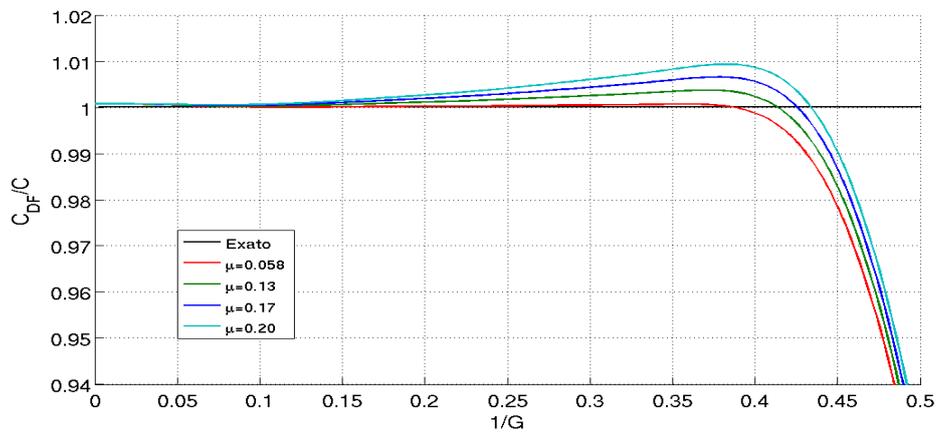


Figura 3.9: Avaliação da dispersão numérica para modelagem da equação acústica da onda 2D pelo MDF com aproximação de 16º ordem, considerando $\theta = 0^\circ$.

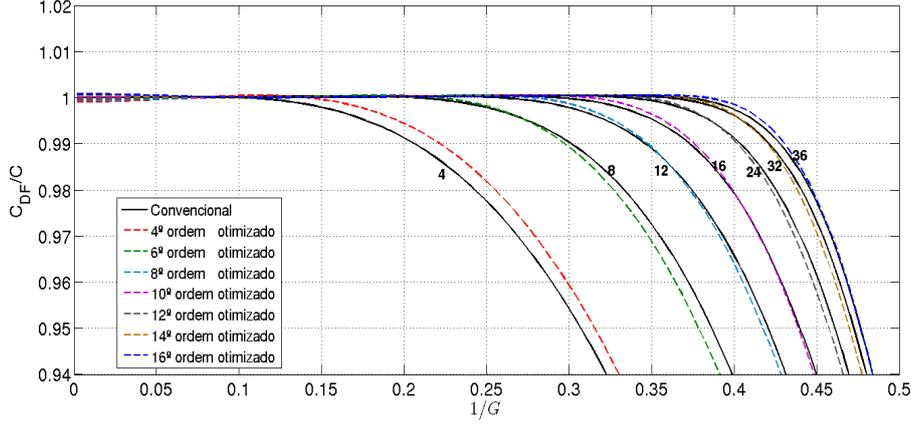


Figura 3.10: Análise comparativa da velocidade de fase utilizando os operadores de diferenças finitas convencionais e convolucionais, considerando μ entre 0.048 e 0.23.

computacional tanto em tempo quanto em demanda de memória.

3.3 Critério de Dispersão e Estabilidade

Para controlar a dispersão numérica na modelagem, existe uma relação entre a menor velocidade do meio contínuo C_{min} , o parâmetro G , que representa o número de pontos necessários para representar o menor comprimento de onda da malha λ_{min} , já mencionado na Equação (3.9), e a frequência de corte (f_{corte}), que limita o máximo valor do espaçamento da malha de forma a não ter excessiva dispersão de energia (MUFTI, 1990), essa relação é dada por:

$$h \leq \frac{\lambda_{min}}{G} = \frac{C_{min}}{Gf_{corte}}, \quad (3.10)$$

Para o critério de estabilidade também apresenta-se uma relação para controle dos valores dos intervalos do tempo de amostragem, evitando que o sistema se torne numericamente instável, esse critério é dado por:

$$dt \leq \frac{h}{\beta C_{max}}, \quad (3.11)$$

onde dt é o intervalo de tempo, C_{max} é a velocidade máxima do meio contínuo e $\beta = \frac{1}{\mu}$.

O parâmetro β determina quantos intervalos de tempo serão necessários para que a frente de onda percorra uma distância equivalente ao espaçamento entre os pontos da malha, considerando a maior velocidade de propagação (BULCÃO, 2004).

Capítulo 4

Migração Reversa no Tempo

A aquisição sísmica consiste em emitir uma onda mecânica na direção da subsuperfície e registrar, através dos sensores (geofones ou hidrofones), o tempo de chegada e as amplitudes das energias refletidas e refratadas nas interfaces geológicas.

Após a aquisição dos dados sísmicos, a migração sísmica surge como uma sequência natural na etapa do processamento (YILMAZ, 2001). A Migração é o conjunto de procedimentos que tem o objetivo de transformar os campos de ondas registrados na superfície ou no fundo oceânico, em uma imagem que representará uma estrutura geológica (seção migrada). Durante este processo, além do correto posicionamento dos refletores, tem-se o colapso das difrações registradas nos sismogramas BULCÃO (2004). Pode-se entender a migração sísmica, filosoficamente, como sendo a operação inversa da modelagem sísmica (GRAY *et al.*, 2001).

A Migração Reversa no Tempo (RTM, do inglês, reverse time migration), proposta por BAYSAL *et al.* (1983), é um método que utiliza a Equação Completa da Onda, não apresenta limitações quanto à variação lateral de velocidade e não impõe limitação quanto aos mergulhos das camadas. Por isso é a mais indicada para áreas geologicamente complexas (BOECHAT, 2007).

Pode-se dizer que a RTM consiste em um problema de condição de contorno associado a uma condição de imagem (SILVA, 2009). Temos como condição de contorno um registro do campo de ondas e como condições de imagem pode-se destacar, por exemplo, a técnica do tempo de excitação baseada no critério de amplitude máxima (BOTELHO e STOFFA, 1991; LOEWENTHAL e HU, 1991) e a correlação cruzada entre os campos ascendentes e descendentes (CLAERBOUT, 1971, 1985; FARIA, 1986), as quais serão descritas nas seções seguintes.

Na Migração Reversa no Tempo, ocorre a propagação reversa dos valores registrados na superfície. Durante essa depropagação aplica-se uma determinada condição de imagem. Para representar o arcabouço estrutural da geologia em estudo matematicamente, pode-se basear nos princípios de Huygens, da reversibilidade temporal e da reciprocidade, afim de dizer que o campo de onda pode ser extrapolado

reversamente no tempo.

Essa depropagação pode ser feita utilizando um macro modelo de velocidade ou um modelo de velocidade suavizado, onde os valores do campo de ondas contidos nos sismogramas são inseridos na posição dos receptores na ordem inversa, os quais foram registrados.

A propagação inversa da onda é realizada utilizando, para o caso acústico, a Equação Escalar da Onda, que normalmente é solucionada pelo MDF. Sendo assim, os mesmos critérios adotados nas seções anteriores devem ser seguido no decorrer da RTM, com isso os ganhos de precisão e custos adquiridos com a utilização do método otimizado, proporcionará uma migração mais precisa em menor tempo.

Com intuito de elucidar a RTM, nas seções a seguir serão abordados os seguinte tópicos: suavização no campo da vagarosidade, a condição de imagem por tempo de excitação, baseada no critério de amplitude máxima e a correlação cruzada entre os campos ascendentes e descendentes.

4.1 Suavização no Campo da Vagarosidade

Ao utilizar a RTM, alguns eventos espúrios como reflexões múltiplas podem aparecer na seção migrada, pois a utilização da Equação Completa da Onda dá origem à múltiplas indesejadas (FARIA, 1986).

Segundo LOEWENTHAL *et al.* (1987), uma forma variada de atenuar essas múltiplas ao utilizar densidade constante é suavizar o campo da vagarosidade empregando uma média aritmética móvel, em todas as direções.

Essa média é obtida para cada ponto tomando-se um quadrado de comprimento igual ao comprimento das ondas, que aparece no campo de pressão. O cálculo dessa média é representado pela Equação (4.1), onde N é um parâmetro associado ao lado do quadrado referente ao ponto, em que foi aplicada a média.

$$(s_{suav})_{i,j} = \frac{1}{(N + 1)^2} \sum_{i=-N}^N \sum_{j=-N}^N s_{i,j} \quad (4.1)$$

A suavização do campo de velocidade ocasiona um avanço na onda transmitida Figura (4.1(b)), se comparado a reflexões no campo de velocidades não suavizado Figura (4.1(a)). Para corrigir esse problema aplica-se à suavização no campo da vagarosidade Figura (4.1(c)). O avanço do tempo da onda, que propaga no modelo de velocidade suavizado ocasionará um erro na migração, não permitindo o correto posicionamento do refletor (FARIA, 1986).



(a) Reflexão no modelo de velocidade sem suavização.



(b) Reflexão no modelo de velocidade suavizado na velocidade.



(c) Reflexão no modelo de velocidade suavizado na vagarosidade.

Figura 4.1: Comparação para reflexão em um modelo normal, suavizado na velocidade e na vagarosidade.

4.2 RTM Utilizando Condição de Imagem Tempo de Excitação

A condição de imagem tempo de excitação é aplicada na RTM, a cada passo de tempo durante a propagação inversa, armazenando na matriz de migração a amplitude dos pontos, que satisfazem a condição de imagem. Tal condição necessita do tempo do campo propagado reversamente e da Matriz de Tempo de Trânsito

$TD(x, y)$, obtida durante a fase de propagação do campo de ondas descendente no macro modelo de velocidades.

A Matriz Tempo de Trânsito pode ser obtida, a partir do método Ray Tracing (CHANG e MCMECHAN, 1986), da solução Eikonal (YILMAZ, 2001), obtendo diretamente o tempo de trânsito ou empregando o critério de amplitude máxima durante a propagação do campo de ondas utilizando o MDF (LOEWHENTHAL e HU, 1991).

A utilização do método *Ray Tracing*, para encontrar a matriz $TD(x, y)$ tem um ganho em relação ao custo computacional em comparação à modelagem via MDF. No entanto, surgem alguns problemas como algumas regiões que não são imageadas pelo esquema de migração, pois podem surgir zonas de sombra, pontos com mais de um tempo de trânsito associado e grande sensibilidade em relação ao macro modelo de velocidade (BULCÃO, 2004).

Com intuito de contornar esses problemas, utiliza-se o critério de amplitude máxima proposto por LOEWHENTHAL e HU (1991). Nele o tempo necessário, para que o campo de maior amplitude da frente de onda chegue a cada ponto do modelo é armazenado na matriz $TD(x, z)$. Para garantir que o tempo registrado na matriz seja de fato, o tempo do campo de maior amplitude da onda direta e não o da chegada de amplitude máxima, já que uma interferência construtiva no ponto pode fazer com que o registro do tempo seja incorreto, pode ser introduzida uma condição na rotina, que faz com que a atualização dos tempos nos pontos, em que a onda direta já passou seja interrompida.

O algoritmo utilizado, para calcular a matriz tempo de trânsito, pelo critério da amplitude máxima pode ser denotado pelo seguinte pseudocódigo:

```

Se
     $|u(x, z, t)| \geq |u(x, z, t - \Delta t)|$ 
Então
     $u_{max}(x, z) = |u(x, z, t)|$ 
     $TD(x, z) = t$ 
Fim do loop Se

```

onde x e z são as variáveis espaciais para o caso 2D, em cada passo de tempo t , $u(x, z, t)$ é uma matriz auxiliar, que armazena o valor da amplitude máxima e a $TD(x, y)$ é a matriz de tempo de trânsito.

Dependendo da complexidade geométrica do modelo de velocidades, as reflexões e reverberações do campo de ondas podem criar inúmeras descontinuidades na matriz de tempo de trânsito. Uma maneira de reduzir tais reflexões é suavizar o modelo de velocidade no campo da vagarosidade, conforme descrito na Seção 4.1.

A próxima etapa é realizar a extrapolação reversa do campo, que é feita depropagando no modelo o sismograma registrado pelos receptores. Cada traço será injetado reversamente no tempo na estação de registro do sinal, que se tornará uma fonte sísmica pontual.

Para o registro de um único tiro, pode-se representar matematicamente essa reinjeção na superfície como:

$$\frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{C^2(x, z)} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = sis(x_i, z = z_{obs}, t), \quad (4.2)$$

onde $P(x, z, t)$ representa o campo de pressão acústico nos pontos (x, z) para um tempo t , $sis(x_i, z = z_{obs})$ é o sismograma e $(x_i, z = z_{obs})$ são as coordenadas da fonte na superfície de observação.

A condição de imagem diz, que o tempo do campo de ondas propagado diretamente a partir da fonte será igual ao tempo do campo de ondas propagado reversamente nas interfaces do modelo (Figura 4.2). Esta condição é imposta para cada passo de tempo durante a depropagação, resultando na seção migrada em profundidade (SILVA, 2009).

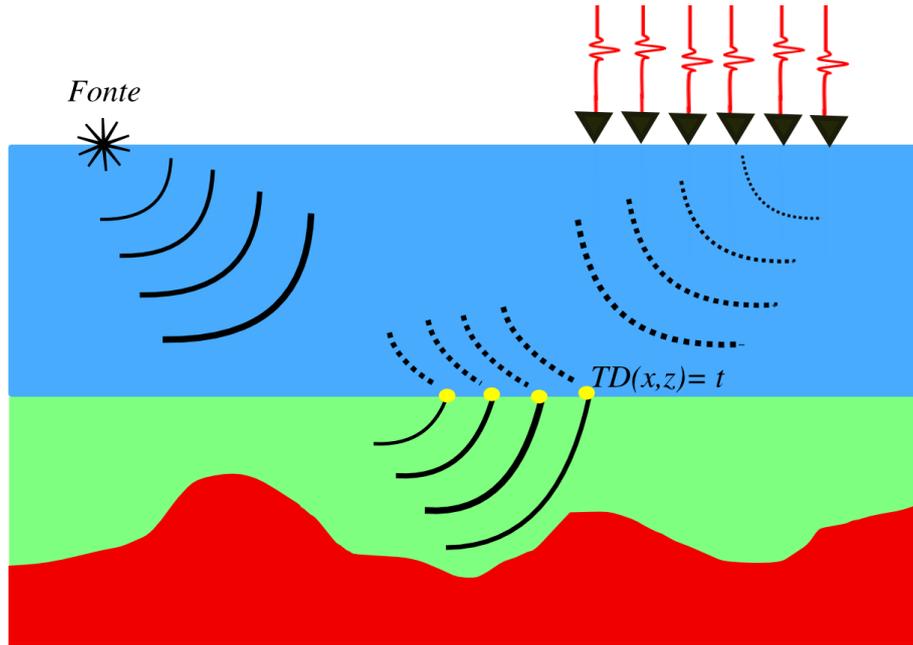


Figura 4.2: Representação da RTM utilizando o critério de amplitude máxima. Observa-se a coincidência temporal do campo de ondas descendente com o ascendente, quando o tempo $TD(x, z)$ for igual ao tempo t .

Matematicamente, para o caso $2D$, a imagem pode ser expressa por:

$$I_m(x, z) = P(x, z, t)\delta(t - TD(x, z)). \quad (4.3)$$

4.3 RTM Utilizando Condição de Imagem de Correlação Cruzada

Neste esquema de Migração Reversa no Tempo utiliza-se uma condição de imagem para determinar a posição correta dos refletores, baseada no princípio da coincidência dos tempos dos campos descendentes com os ascendentes sobre os refletores (CLAERBOUT, 1971) (Figura 4.3). Para utilizar a condição de imagem de correlação cruzada e identificar uma superfície refletora, basta conhecer os campos ascendentes e descendentes. Caso no mesmo instante suas frentes de onda interceptarem o mesmo ponto, este pertencerá a superfície refletora.

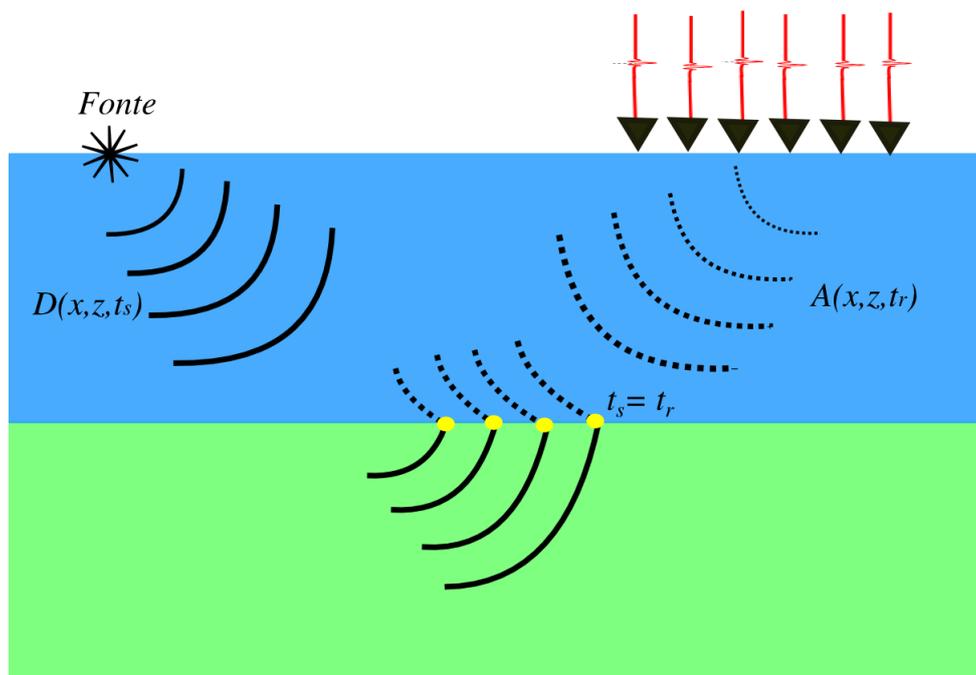


Figura 4.3: Representação do princípio de coincidência temporal. Campo de ondas ascendentes e descendentes se interceptam no mesmo instante, somente na interface.

Nessa dissertação o campo de onda descendente foi obtido pela modelagem utilizando a propagação direta no modelo de velocidade suavizado na vagarosidade, conforme descrito na Seção 4.1, e o campo de onda ascendente propagado reversamente no tempo é o sismograma real ou sintético.

De acordo com FARIA (1986) para melhor compreensão da condição de imagem com correlação cruzada, propõe-se um modelo simples, com apenas um refletor e a uma fonte sísmica, como pulso unitário. Para essa proposta a multiplicação dois campos de ondas descendentes $D(x, z, t_s)$ e ascendentes $A(x, z, t_s - T)$, para um passo de tempo t nos pontos sobre a superfície refletora será:

$$D(x, z, t_s)A(x, z, t_s - T) \neq 0, \quad (4.4)$$

e para todos os pontos (x, z) , que não pertencerem a superfície refletora teremos:

$$D(x, z, t_s)A(x, z, t_s - T) = 0, \quad (4.5)$$

em que t_s corresponde ao tempo de propagação do campo da fonte até o ponto refletor, T é o tempo total de percurso da fonte até o receptor, sendo equivalente a $T = t_s + t_r$, em que t_r é o tempo de percurso do ponto refletor até o receptor.

A correlação cruzada entre os dois campos de ondas ascendente e descendente podem ser representadas da seguinte forma (FARIA, 1986):

$$I_m(x, z) = \sum_{t=0}^{t=T_{total}} D(x, z, t)A(x, z, t), \quad (4.6)$$

em que $I_m(x, z)$ é a matriz que contém a imagem em profundidade, t é o tempo e T_{total} é o tempo total de propagação.

Contudo, como apontado em KAELIN e GUITTON (2006), essa condição de imagem gera resultados satisfatórios somente para meios com baixo contraste de impedância acústica. Porém, para meios com altos contrastes de impedância e geologicamente complexos, podem aparecer artefatos que prejudicarão a seção migrada. Uma forma de gerar uma imagem sem tais artefatos é normalizar a condição de imagem com os campos de ondas ascendentes ou descendentes.

Normalizando a correlação cruzada com os campos descendentes:

$$I_m(x, z) = \frac{\sum_{t=0}^{t=T_{total}} D(x, z, t)A(x, z, t)}{\sum_{t=0}^{t=T_{total}} D(x, z, t)D(x, z, t)} \quad (4.7)$$

Normalizando a correlação cruzada com os campos ascendentes:

$$I_m(x, z) = \frac{\sum_{t=0}^{t=T_{total}} D(x, z, t)A(x, z, t)}{\sum_{t=0}^{t=T_{total}} A(x, z, t)A(x, z, t)} \quad (4.8)$$

Dividindo a correlação cruzada pela autocorrelação do campo de ondas descendentes ou ascendentes, a seção sísmica obtida pode ser melhorada. No entanto, a normalização com os campos descendentes melhora a imagem próxima da fonte sísmica e a normalização com os campos ascendentes melhora toda a imagem (KAELIN e GUITTON, 2006).

Para detalhes da implementação computacional da RTM utilizando a condição de imagem de correlação cruzada vide (BULCÃO, 2004; SILVA, 2012)

Capítulo 5

Aplicações e Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados das análises de precisão numérica e eficiência computacional do operador de DF otimizado, empregado na Modelagem Acústica da Onda e na *RTM*.

Nos capítulos anteriores foi comprovada a precisão analítica do operador, agora será avaliado sua precisão no mundo discreto. Para isso, inicialmente será simulada a propagação acústica da onda em um meio homogêneo utilizando a metodologia adotada nos Capítulos 2 e 3, tendo como objetivo validar os métodos e avaliar a precisão entre as diversas ordens do operador otimizado, comparando seu resultado com o do operador convencional. As comparações avaliarão a influência do espaçamento entre as malhas, apresentando os *snapshots* da modelagem sísmica para diferentes ordens. Pode ser difícil avaliar a presença de dispersão nos *snapshots*, por isso, são destacados os registros do campo em um único receptor.

A simulação da propagação de ondas sísmicas via MDF envolve as relações de dispersão e estabilidade para determinar os parâmetros h e dt , conforme descrito na Seção 3.3. Diversos trabalhos explicam essas relações para modelagem com expansão de quarta ordem com eficiência e precisão. No entanto, para altas ordens esses critérios não são bem difundidos.

Neste capítulo, serão apresentados os parâmetros de estabilidade e dispersão utilizados para gerar os resultados da modelagem acústica da onda, empregando as altas ordens do MDF. Tais parâmetros foram gerados com base no Capítulo 3, com o objetivo de melhorar a eficiência e precisão do método.

Para analisar a influência do método otimizado na *RTM*, serão feitas aplicações em um modelo complexo. A escolha da ordem utilizada na migração tomará como base os resultados do custo computacional, afim de inferir uma migração mais rápida e precisa.

5.1 Modelo Homogêneo

Para validar o código de modelagem sísmica e avaliar a precisão do MDF otimizado foi realizada uma simulação da propagação do campo de pressão utilizando a Equação Acústica da Onda para cada ordem de expansão do operador. O modelo empregado é homogêneo, possui densidade constante, tem dimensões fixas de $x = 18,71 \text{ km}$ e $z = 14,97 \text{ km}$, velocidade do meio igual à 1500 km/s e frequência de corte de 30 Hz . Os parâmetros de dispersão e estabilidade utilizados encontram-se nas seguintes Tabelas:

Tabela 5.1: Parâmetros para modelagem acústica da onda empregando o operador convencional.

N	G	μ	$h(m)$
8	3,33	0,11	15
12	2,94	0,08	17
16	2,7	0,071	18
24	2,5	0,061	20
36	2,33	0,053	21

Tabela 5.2: Parâmetros para modelagem acústica da onda utilizando operador otimizado.

N	G	μ	$h(m)$
8	2,9	0,07	17
12	2,5	0,054	20
16	2,3	0,048	22

5.1.1 Avaliação para expansão de 8^a ordem

Os primeiros três resultados visaram comparar a precisão entre a 8^a ordem otimizada, 8^a ordem convencional e 12^a ordem convencional. Para isso foi definido o mesmo espaçamento entre a malha e o mesmo intervalo temporal.

As Figuras (5.1(a), 5.1(c) e 5.1(e)) representam uma sequência de *snapshots* mostrando a propagação do campo de ondas nos tempos de 2,1 s, 5,6 s e 10,5 s, para o operador espacial de 8^a ordem otimizada. Os parâmetros envolvidos na modelagem encontram-se na Tabela 5.3. Em todos os exemplos desta seção não foi aplicado a borda de absorção.

As Figuras (5.1(b), 5.1(d) e 5.1(f)) são ampliações dos *snapshots* e foram apresentadas com o intuito de melhorar a constatação da presença ou não da dispersão numérica. É evidente que se tratando de uma aproximação numérica sempre

haverá presença de dispersão. As análises são para mostrar qual modelagem apresenta menor dispersão.

Tabela 5.3: Parâmetros da modelagem para avaliação de 8ª ordem de expansão do operador otimizado.

Velocidade do meio	1500m/s
Total de passos de tempo	20000
Intervalo de amostragem temporal (dt)	0.7ms
Número de pontos na direção horizontal	1101
Número de pontos na direção vertical	881
Espaçamento entre os pontos da malhas (h)	17m
Frequência de corte	30Hz

Dando continuidade na avaliação de dispersão numérica apresenta-se na Figura 5.2 a propagação do campo de pressão para o operador espacial de 12ª ordem convencional (Figuras (5.2(a),5.2(c) e 5.2(e))). As Figuras (5.2(b) , 5.2(d) e 5.2(f)) são ampliações dos *snapshots* para os tempos de 2,1s, 5,6s e 10,5s respectivamente.

Na Figura 5.3 a esquerda pode ser observado a sequência de *snapshots* mostrando a propagação do campo de onda com o operador convencional, utilizando o mesmo espaçamento da malha e intervalo temporal da modelagem de 8ª ordem com o operador otimizado. Na direita da Figura encontram-se as ampliações dos *snapshots*.

Foi gerado também, a modelagem utilizando o operador convencional de 8ª ordem com o mesmo h e dt das modelagens anteriores. Os *snapshots* podem ser vistos no lado esquerdo da Figura 5.3.

Conforme as análises estabelecidas no Capítulo 3, observa-se na Tabela (5.3) que o espaçamento entre os pontos da malha extrapola o limite de dispersão, para expansão de 8ª ordem convencional. Com isso a simulação da propagação de ondas sísmica, consegue demonstrar que a precisão do operador espacial de 8ª ordem otimizada é maior que a de 8ª ordem convencional e similar ao de 12ª ordem convencional. Esta afirmação pode ser constatada ao comparar a Figura 5.1 com a Figura 5.3 e a Figura 5.1 com a Figura 5.2.

Para não deixar dúvidas, quanto a superioridade da precisão da modelagem utilizando o operador de 8ª ordem otimizada, apresenta-se na Figura 5.4 o registro entre 4 s e 6,5 s de um receptor localizado na posição (9350 m, 1020 m). Os resultados mostraram novamente que a 8ª ordem do método otimizado (5.4(a)) alcançou um resultado equivalente a 12ª ordem do método convencional (Figura 5.4(c)) e foi superior a 8ª ordem do método convencional (5.4(b)).

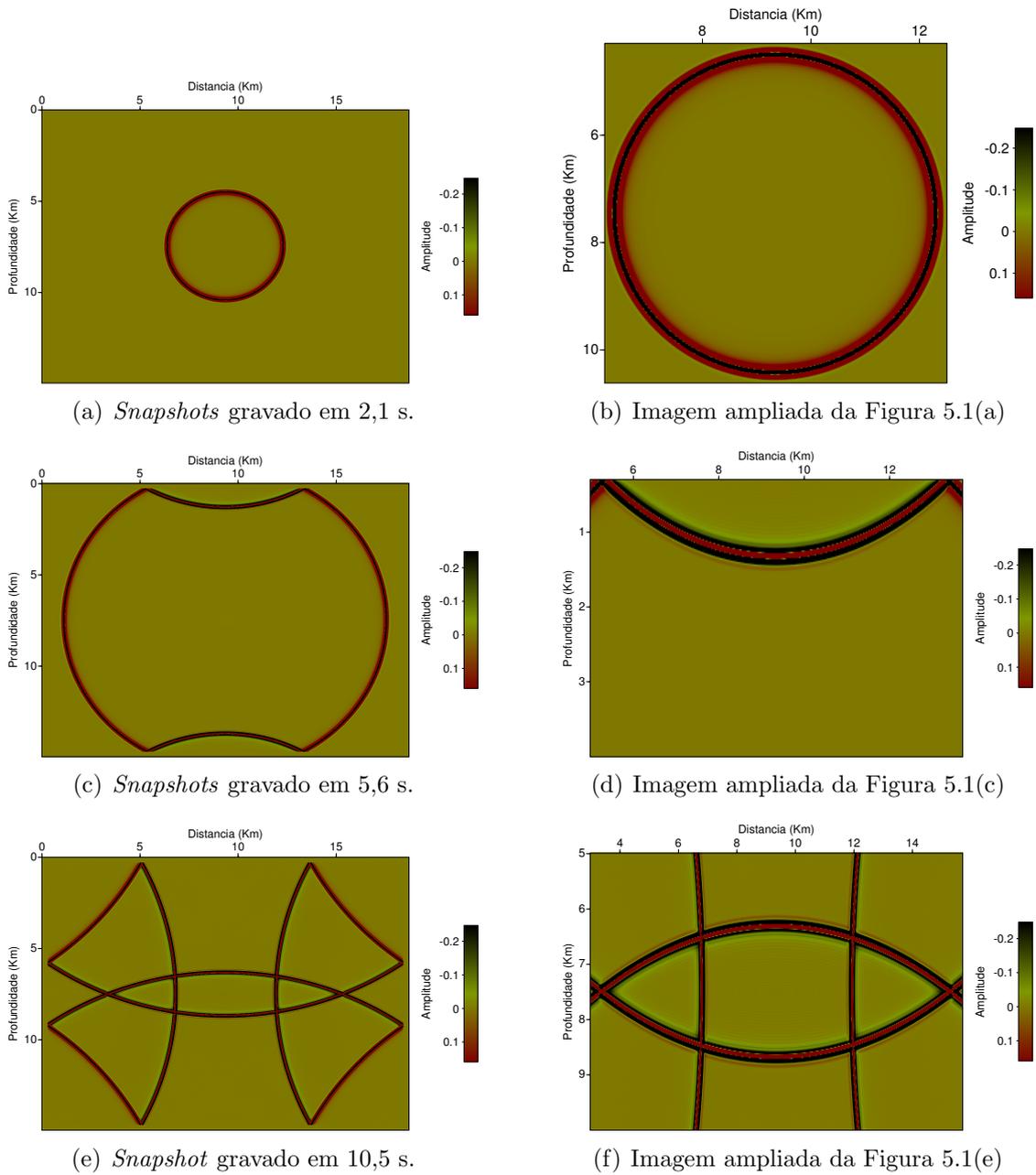


Figura 5.1: *Snapshots* da Modelagem 2D em um modelo homogêneo calculado pelo MDF utilizando operador de 8ª ordem otimizado.

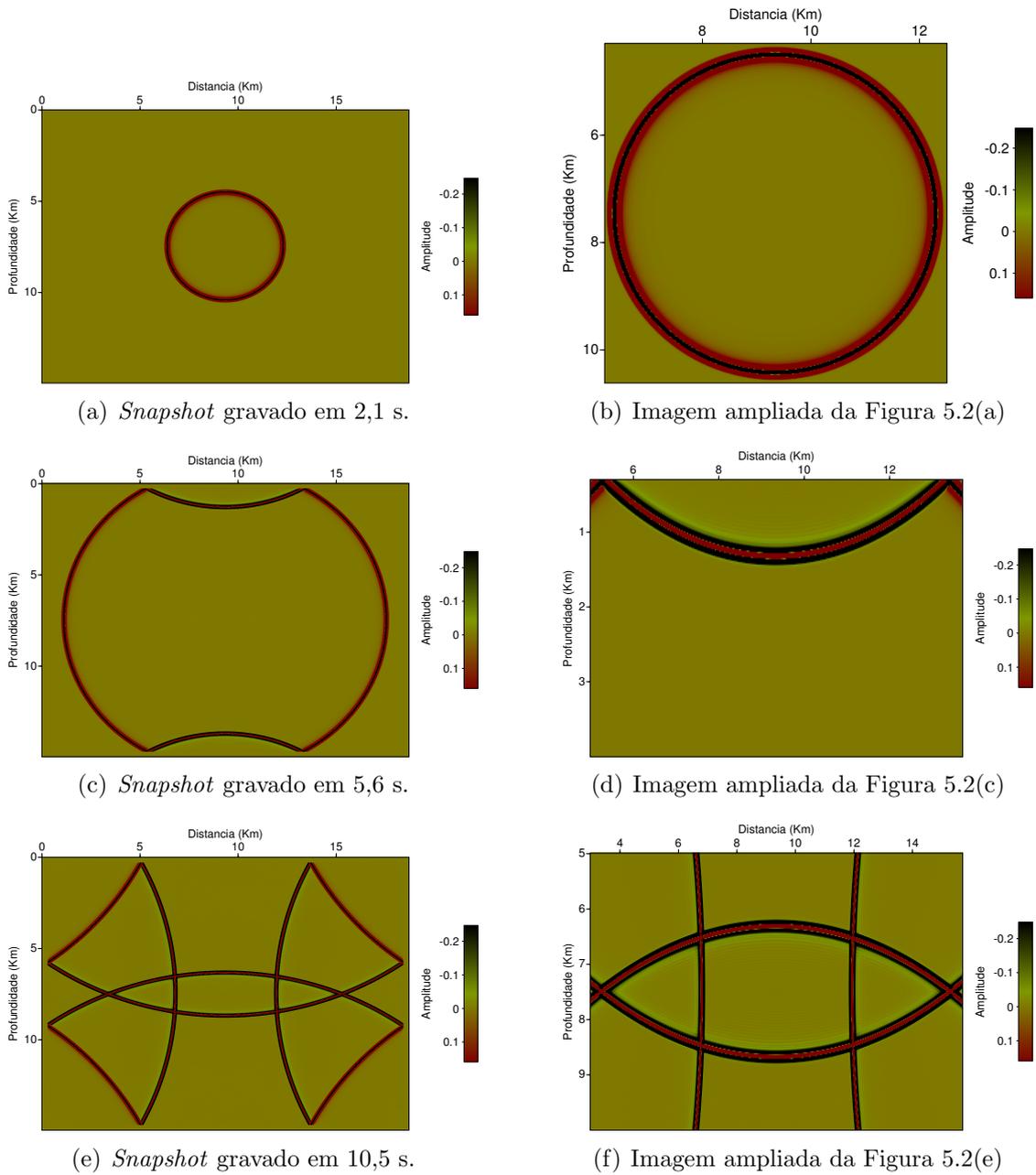


Figura 5.2: *Snapshots* da Modelagem 2D em um modelo homogêneo calculado pelo MDF, utilizando o operador de 12^a ordem convencional.

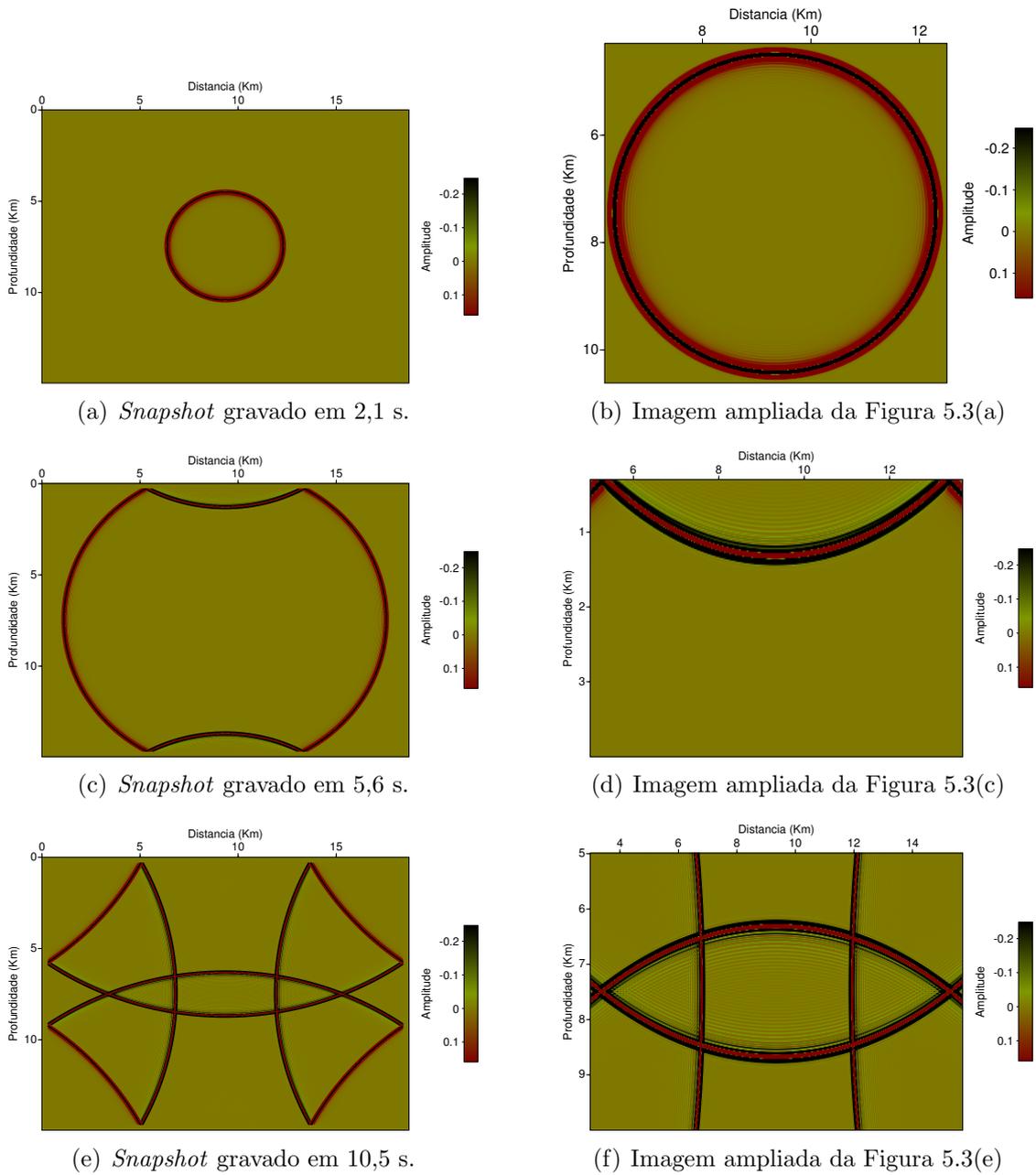
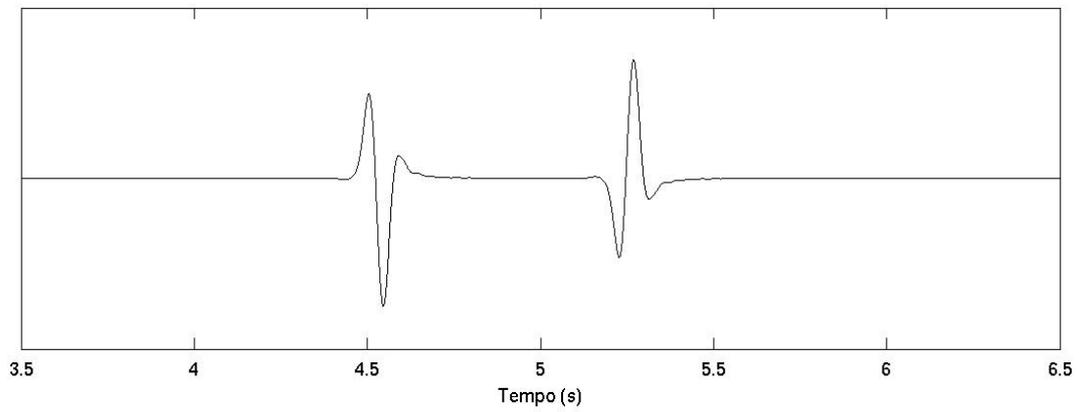
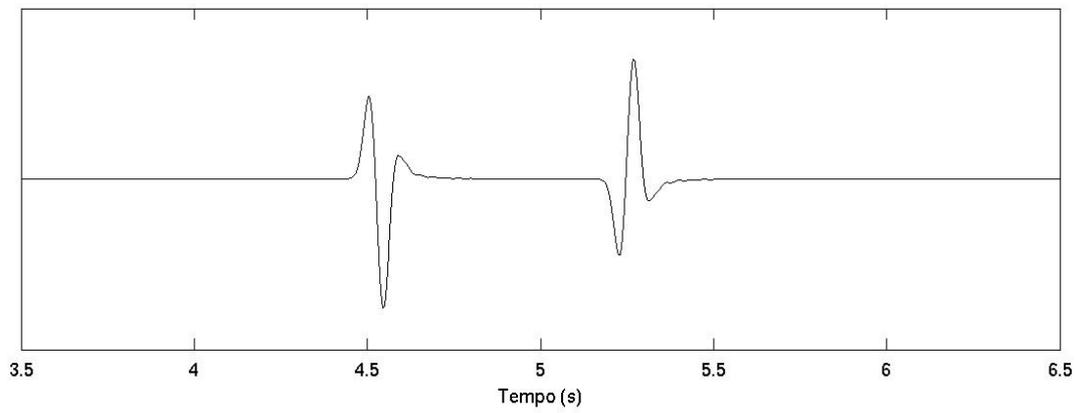


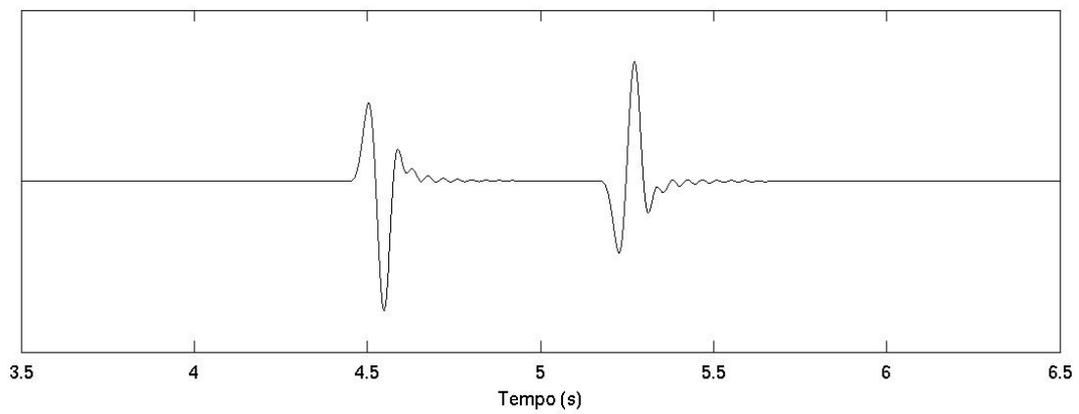
Figura 5.3: *Snapshot* da Modelagem 2D em um modelo homogêneo calculado pelo MDF, utilizando operador convencional de 8ª ordem.



(a) Operador de DF de 8^a ordem otimizada.



(b) Operador de DF de 12^a ordem convencional.



(c) Operador de DF de 8^a ordem convencional.

Figura 5.4: Comparação da precisão dos operadores convencional e otimizado.

5.1.2 Avaliação para expansão de 12^a ordem

A segunda avaliação da modelagem, tem como objetivo comparar a precisão entre o operador espacial de 12^a ordem otimizada e os operadores de 12^a ordem e 24^a ordem convencional.

Os parâmetros utilizados para modelagem sísmica desta seção encontram-se na Tabela 5.4. Nesta tabela pode-se observar o decréscimo do número de pontos do modelo, devido o aumento do espaçamento entre a malha em comparação ao exemplo anterior. Tal redução contribui de forma significativa para redução da demanda de memória. A modelagem para 12^a ordem otimizada, 24^a ordem e 12^a ordem convencional podem ser observadas respectivamente nas Figuras (5.5 , 5.6 e 5.7). A esquerda visualiza-se a sequência de *snapshots* apresentando a propagação do campo de onda sobre o modelo e a direita, a imagem ampliada desses *snapshots*. A Figura 5.7(e) apresenta uma forte evidência de dispersão numérica.

Ao comparar as Figuras (5.5 e 5.7), observa-se que o operador de 12^a ordem otimizada apresentou melhor propriedade de dispersão que o operador de 12^a ordem convencional. Comparando os resultados apresentados nas Figuras (5.5 e 5.6) a equivalência entre a modelagem acústica da onda utilizando operador de 12^a ordem otimizada e de 24^a ordem convencional.

Nos resultados numéricos presente na Figura 5.8, onde foi apresentado o registro do receptor situado na posição (9350 m,1200 m), o esquema de 12^a ordem otimizada (Figura 5.8(a)) apresentou uma precisão bem mais elevada do que a 12^a ordem convencional (Figura 5.8(c)).

Tabela 5.4: Parâmetros da modelagem acústica da onda para avaliação de 12^a ordem do operador otimizado.

Velocidade do meio	1500m/s
Total de passos de tempo	20000
Intervalo de amostragem temporal (dt)	0.7ms
Número de pontos na direção horizontal	936
Número de pontos na direção vertical	749
Espaçamento entre os pontos da malhas (<i>h</i>)	20m
Frequência de corte	30Hz

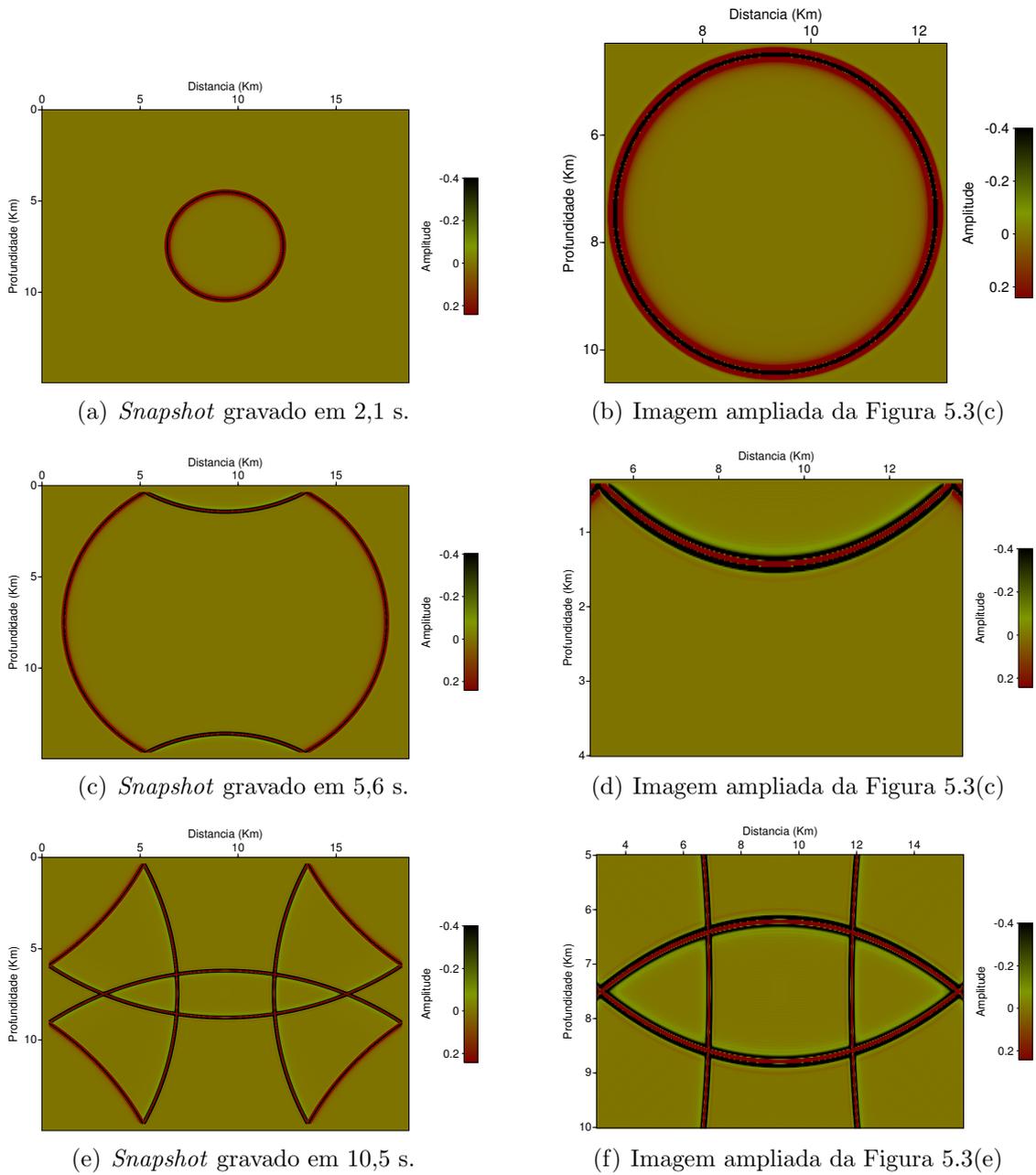


Figura 5.5: *Snapshots* da Modelagem 2D em um modelo homogêneo calculado pelo MDF, utilizando operador de 12^a ordem otimizada

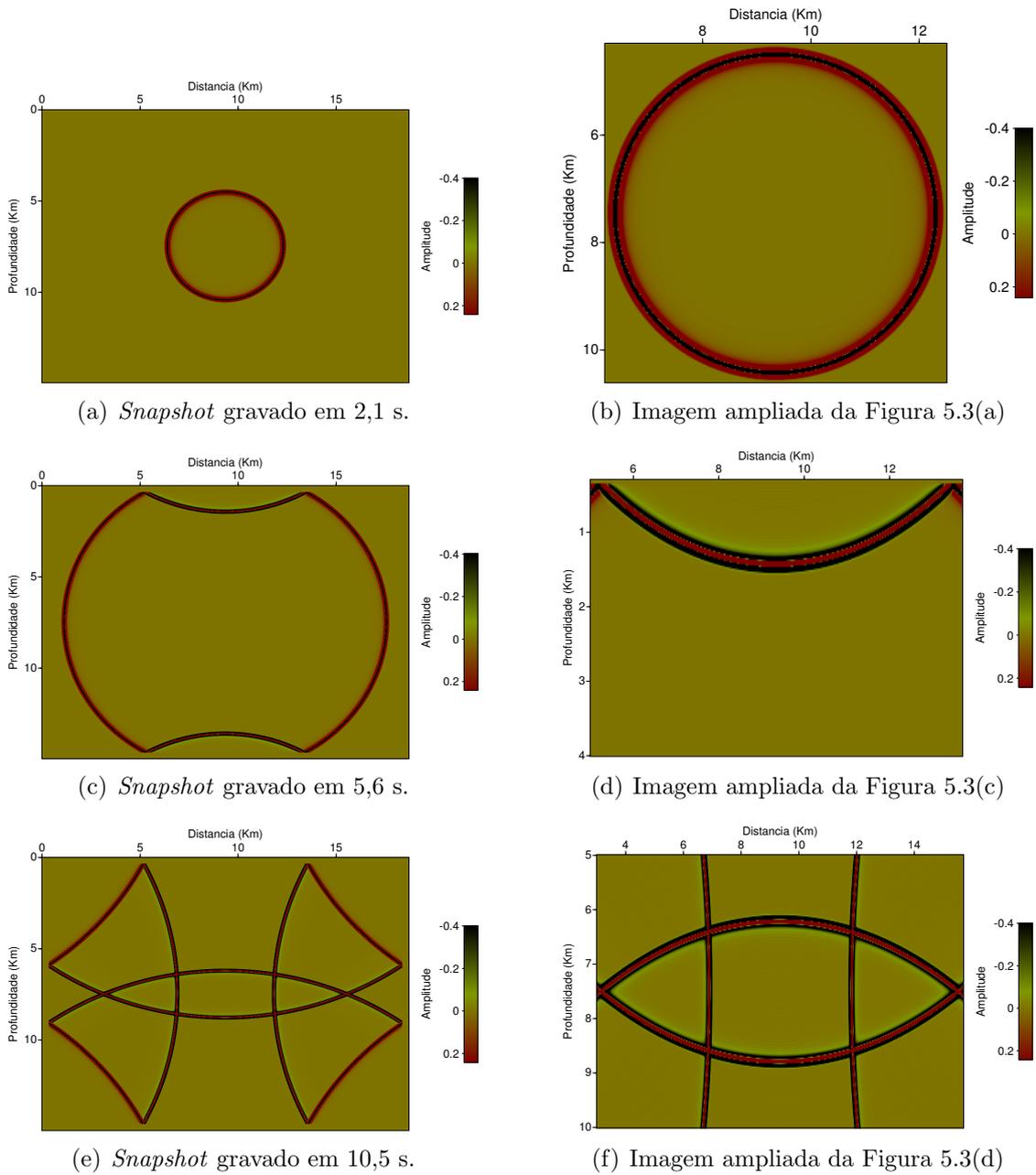


Figura 5.6: *Snapshots* da Modelagem 2D em um modelo homogêneo calculado pelo MDF, utilizando operador de 24^a ordem convencional

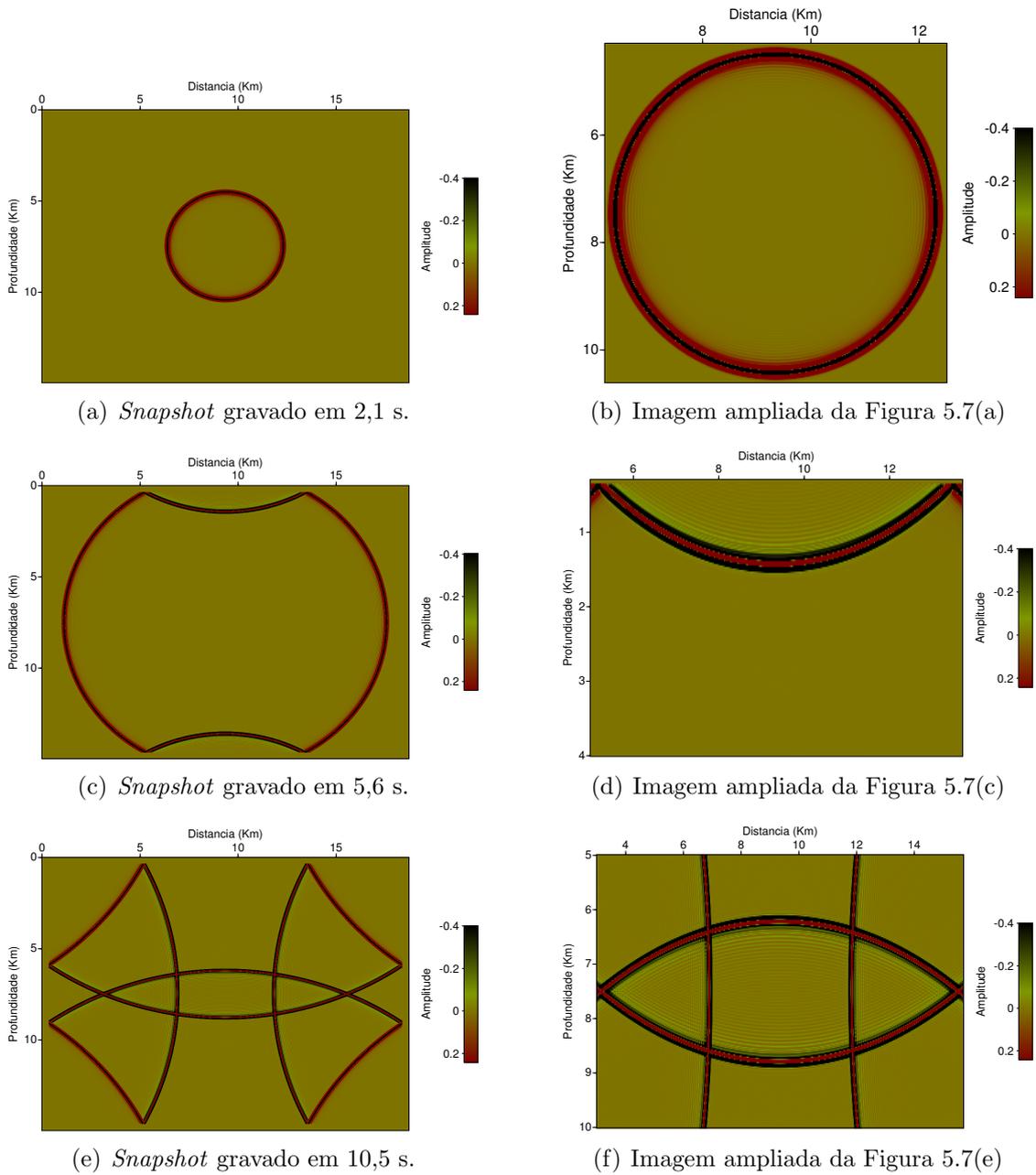
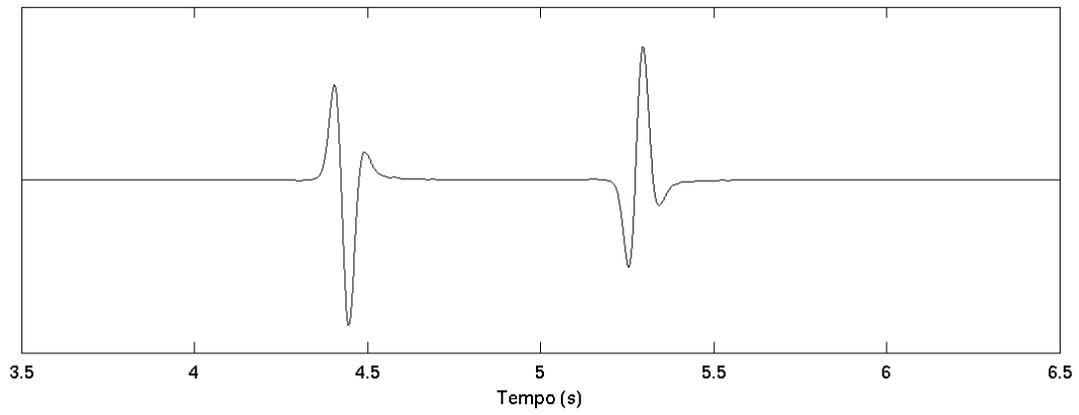
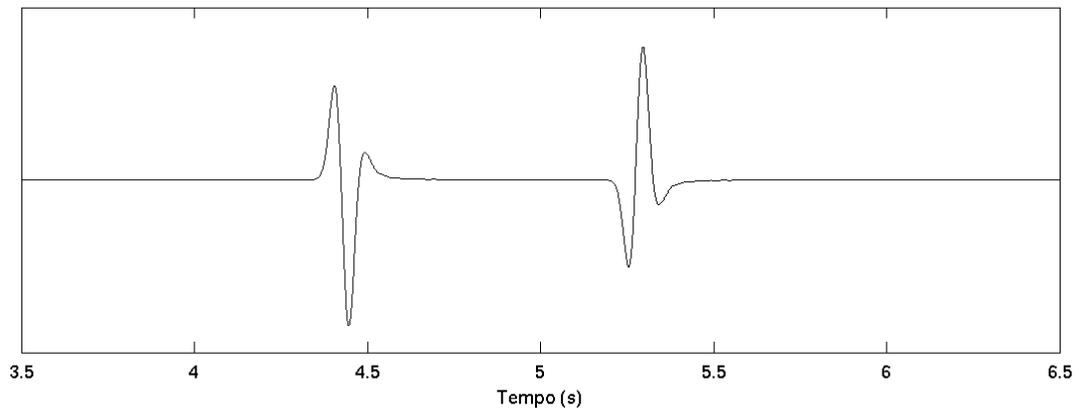


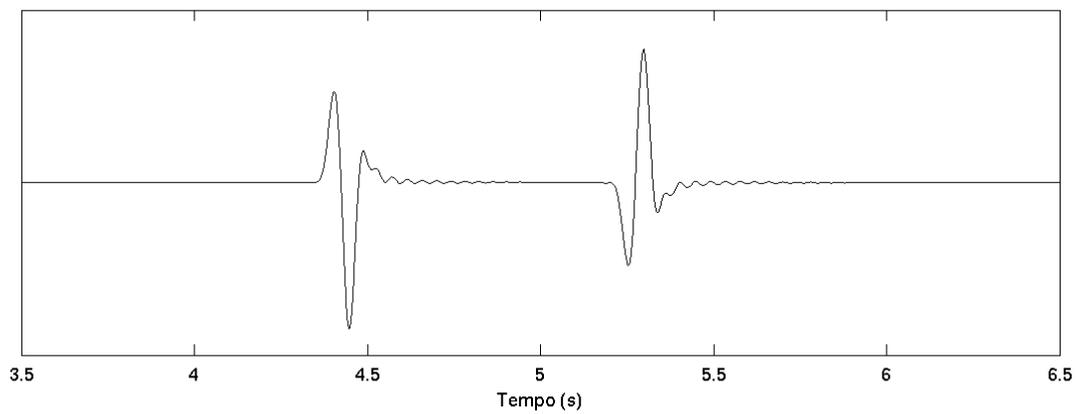
Figura 5.7: *Snapshot* da Modelagem 2D em um modelo homogêneo calculado pelo MDF, utilizando operador de 12^a ordem convencional.



(a) Operador de DF de 12^a ordem otimizada.



(b) Operador de DF de 24^a ordem convencional.



(c) Operador de DF de 12^a ordem convencional.

Figura 5.8: Comparação entre os operadores de 12^a ordem otimizada, 12^a ordem convencional e 24^a ordem convencional.

5.1.3 Avaliação para expansão de 16^a ordem

A terceira análise avalia a precisão da 16^a ordem do operador de DF otimizado, gerada a partir da modelagem com a inserção da fonte na posição central do modelo conforme apresentado nos *Snapshots* das Figuras (5.9 , 5.10 e 5.11). Os parâmetros necessário para cada modelagem encontram-se na Tabela 5.5.

Comparando o campo de onda gerado na modelagem da Figura 5.9 com a modelagem presente na Figura 5.11, observa-se que existe uma forte presença de dispersão numérica apenas na modelagem com o operador de 16^a ordem convencional. A equivalência de precisão pode ser constada na comparação da modelagem que utiliza o operador de 16^a ordem otimizada (Figura 5.9) com a modelagem que emprega o operador de 36^a ordem convencional (Figura 5.10).

Um resultado similar aparece ao comparar as Figuras (5.12(a) e 5.12(c) e 5.12(b)), tal comparação reforça a forte presença de dispersão na modelagem através método convencional que emprega o operador de 16^a ordem.

Tabela 5.5: Parâmetros da modelagem acústica da onda para a expansão de 16^a ordem do operador otimizado.

Velocidade do meio	1500m/s
Total de passos de tempo	20000
Intervalo de amostragem temporal (dt)	0.7ms
Número de pontos na direção horizontal	851
Número de pontos na direção vertical	681
Espaçamento entre os pontos da malhas (h)	22m
Frequência de corte	30Hz

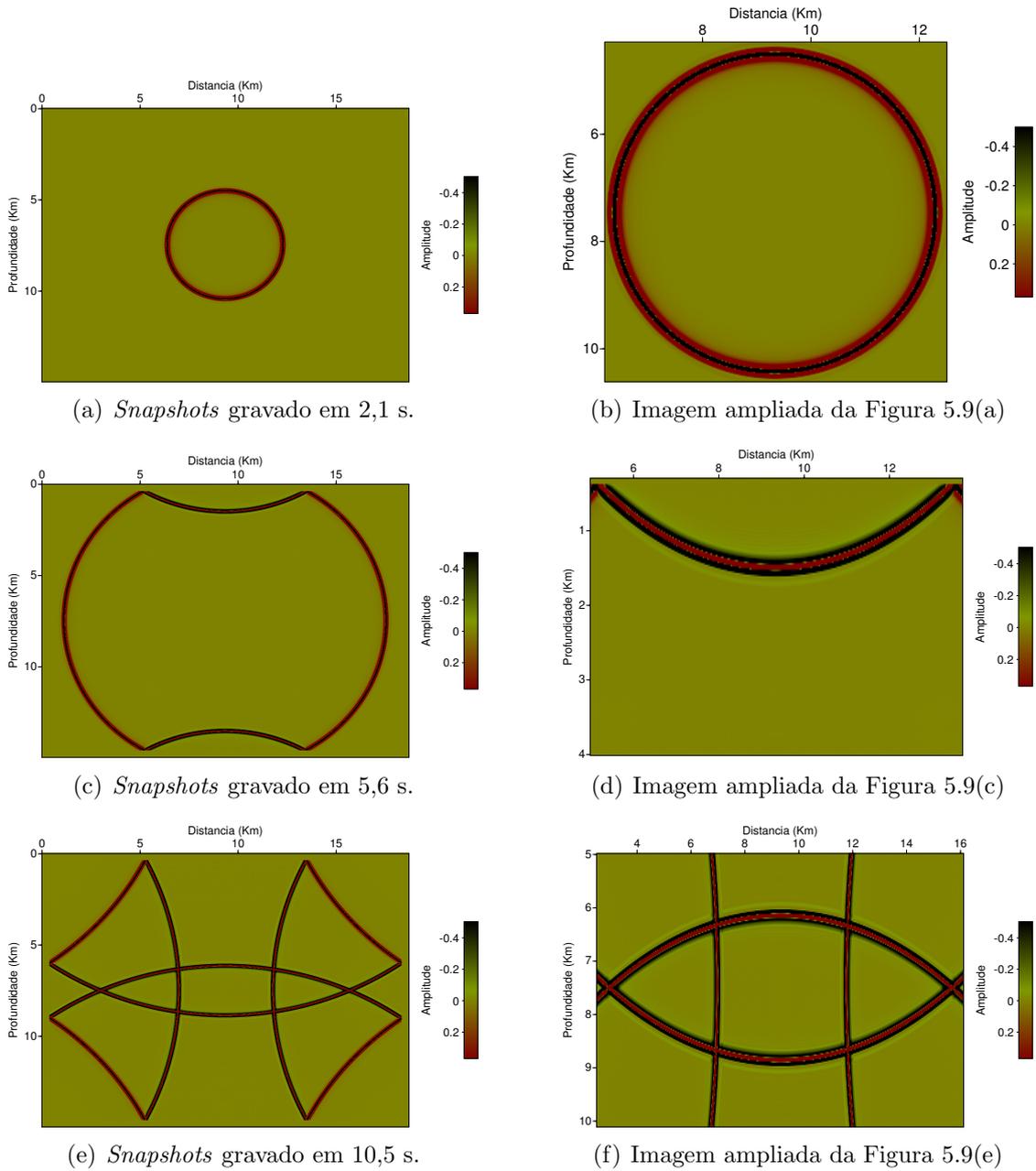


Figura 5.9: *Snapshots* da Modelagem 2D em um modelo homogêneo calculado pelo MDF utilizando a 16ª ordem do operador convencional.

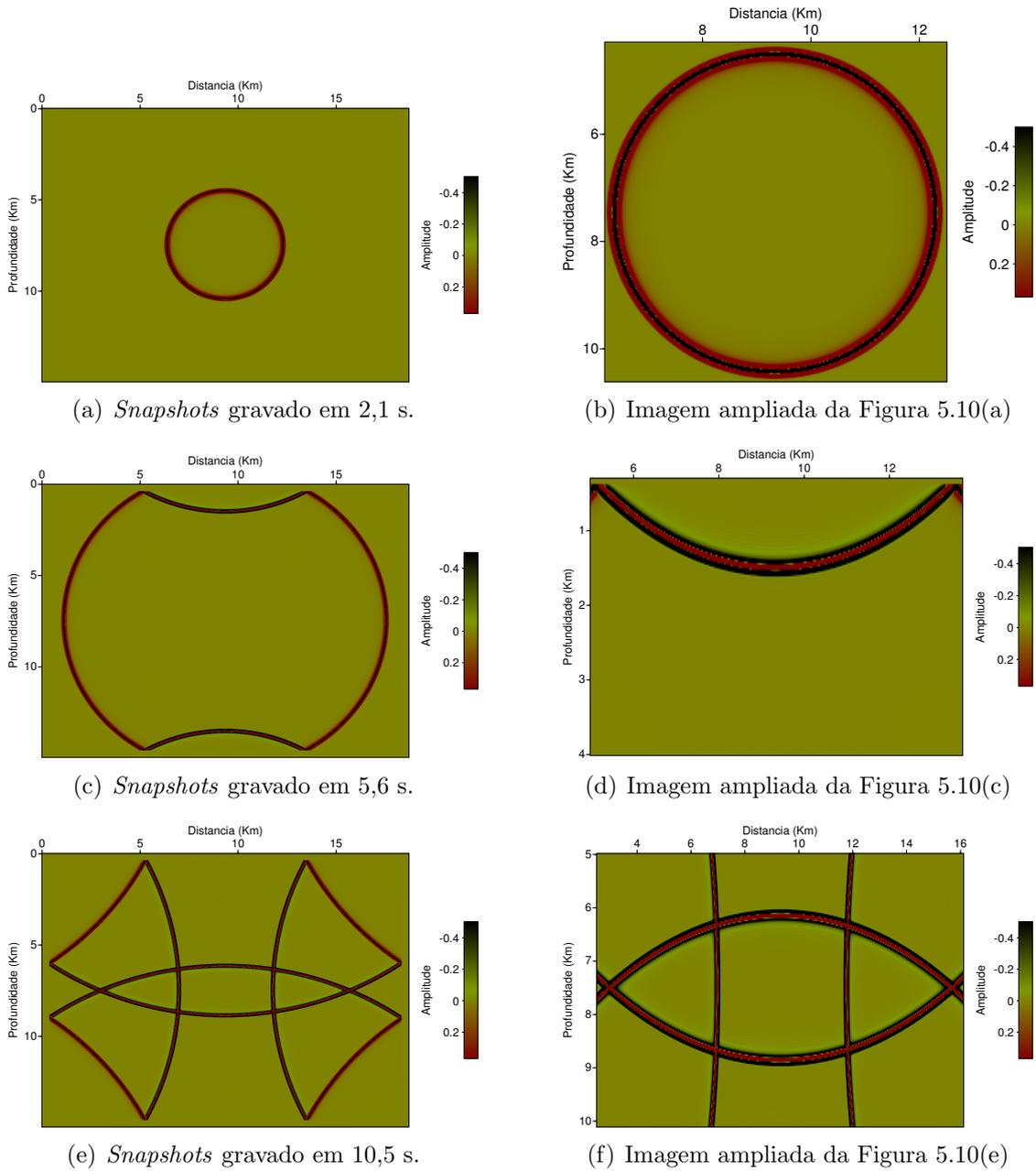


Figura 5.10: Snapshots da Modelagem 2D para um modelo homogêneo calculado pelo MDF utilizando operador de 36ª ordem convencional.

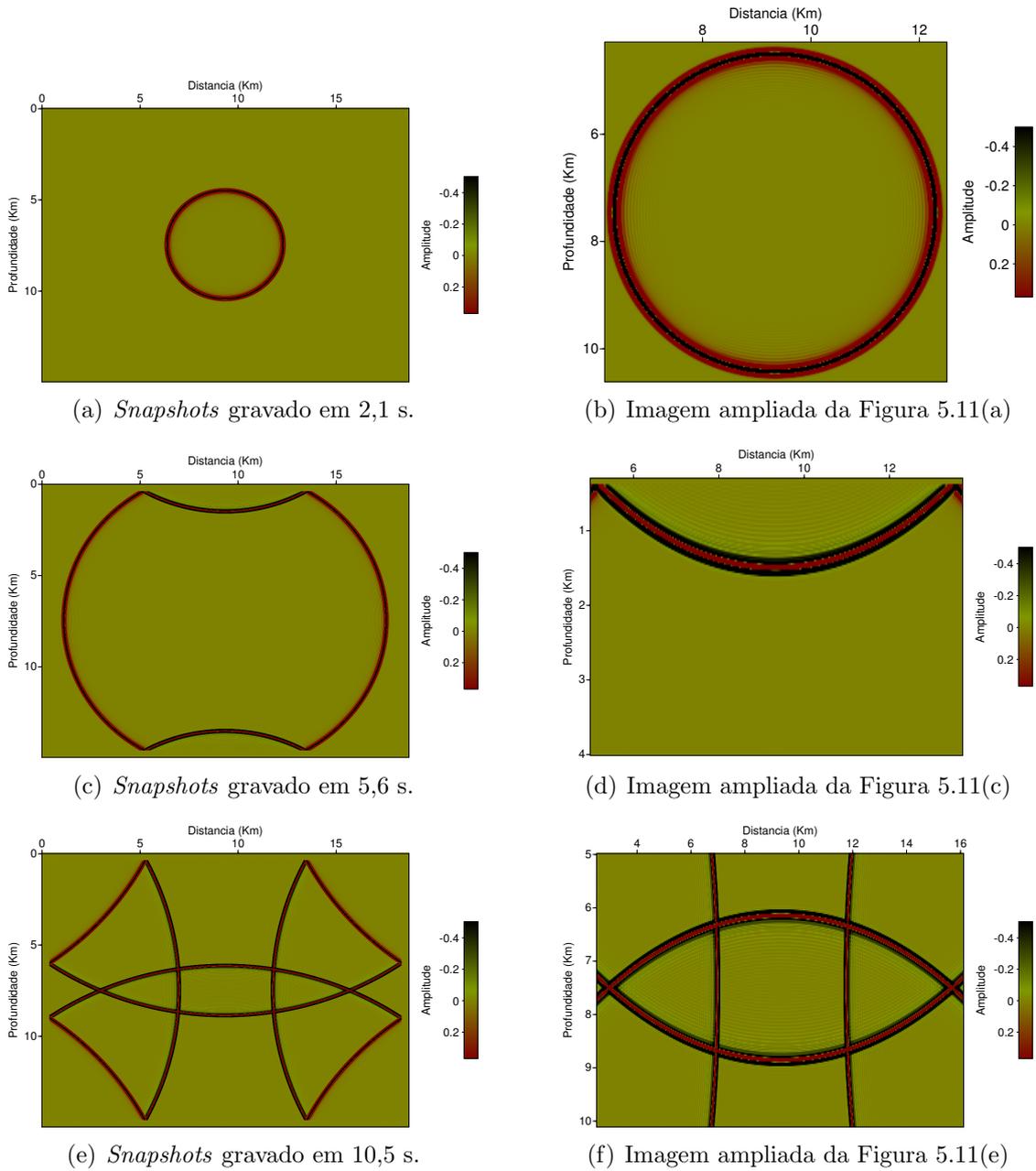
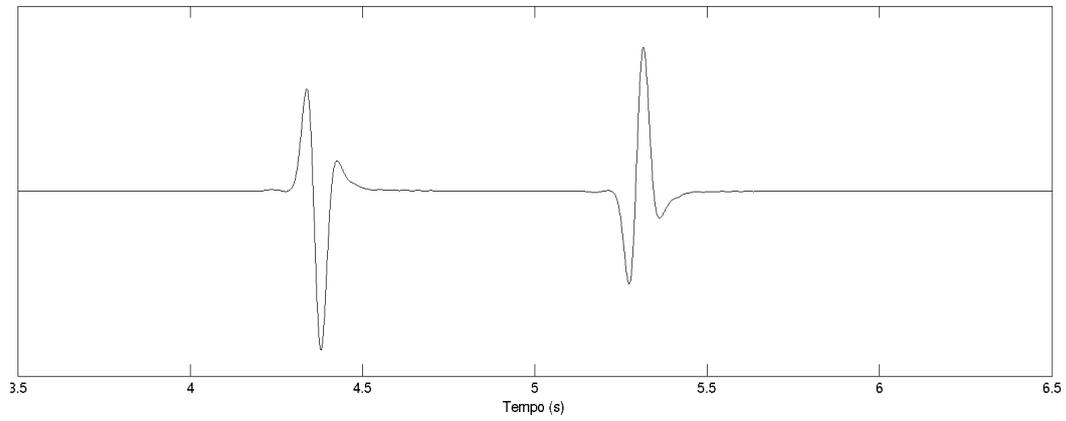
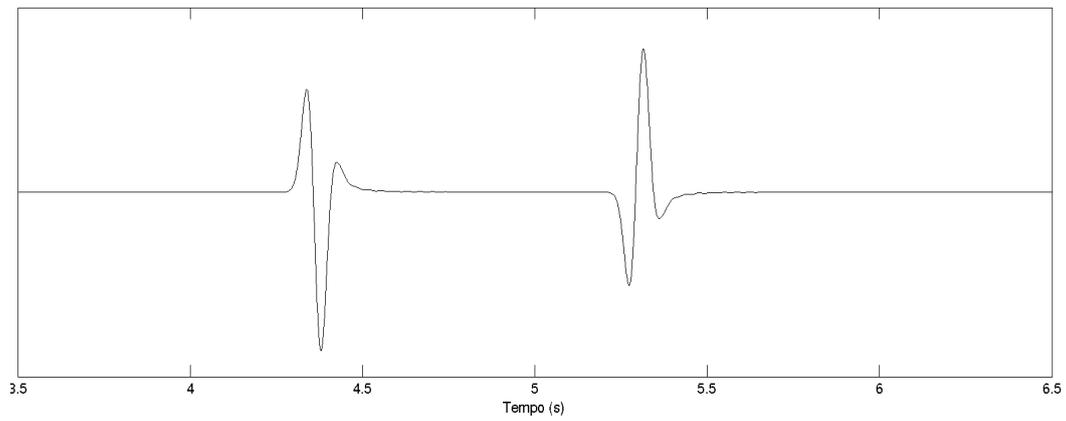


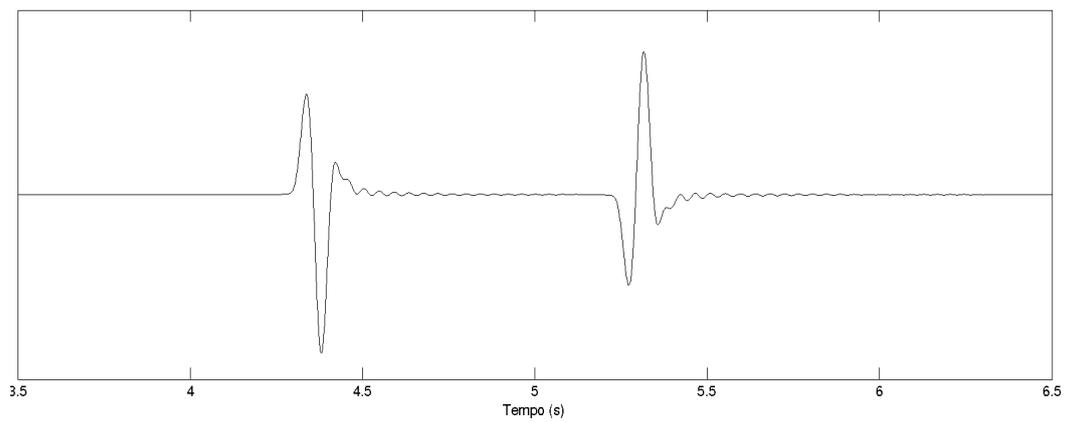
Figura 5.11: Snapshots da Modelagem 2D para um modelo homogêneo calculado pelo MDF utilizando operador de 16^a ordem convencional.



(a) Operador de DF de 16^a ordem otimizada.



(b) Operador de DF de 36^a ordem convencional.



(c) Operador de DF de 16^a ordem convencional.

Figura 5.12: Comparação entre os operadores de 16^a ordem otimizada, 16^a ordem e 36^a ordem convencional.

5.2 Modelo Marmousi

Para verificar a precisão das diferentes ordens do MDF otimizado empregados na modelagem acústica da onda, sobre modelos geologicamente complexo, foi avaliado a modelagem com operador otimizado de 8ª, 12ª e 16ª ordem no modelo marmousi modificado (Figura 5.13), comparando com as diferentes ordens do método convencional.

O modelo sintético Marmousi, foi desenvolvido pelo Instituto Francês de Petróleo e se tornou um *benchmark* muito utilizado pela indústria e a comunidade acadêmica. Esse modelo é baseado na geologia real da bacia de Cuanza, Angola, e compreende-se em um dado acústico 2-D de geologia complexa, contendo falhas de crescimento erguendo-se a partir de um truncamento de sal, até chegarem a uma complicada estrutura de velocidade na parte superior do modelo (PINHEIRO, 2007).

Para fins de comparação da precisão, foi gerado como referência o campo de ondas para trigésima sexta ordem convencional. Para os traços (A, B e C) presente nas Figuras (5.14(b), 5.14(c), 5.15(b), 5.15(c), 5.16(b) e 5.16(c)). Considere que a linha contínua representa a 36ª ordem e a tracejada a ordem, conforme indicado sobre a linha.

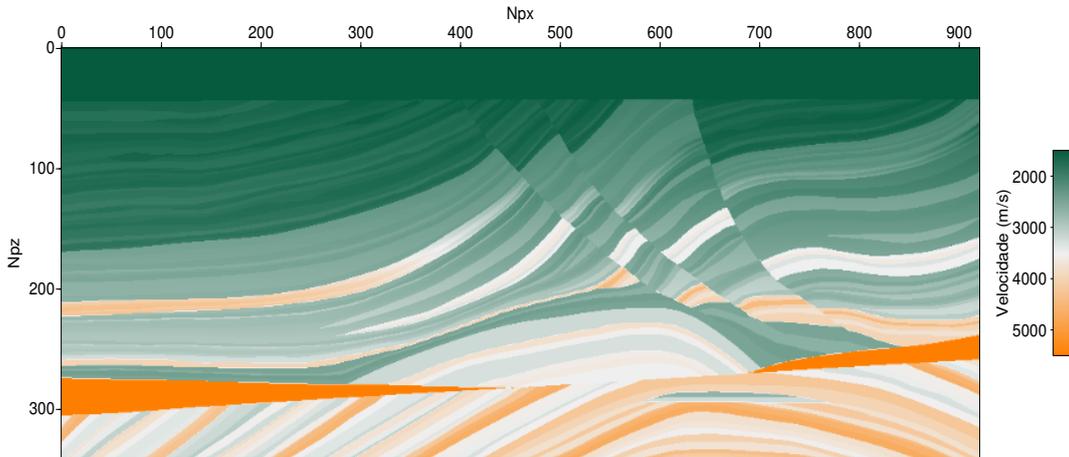


Figura 5.13: Modelo Marmousi modificado com dimensões de 9210 m x 3410 m

A avaliação na Figura 5.14 representa o registro do receptor, situado na posição (7 km , 310 m). A fonte foi inserida na posição (4,6 km , 310 m). A frequência de corte utilizada foi de 60Hz . O número de pontos na direção x é $Np_x = 921$ e na direção z é $Np_z = 341$. O espaçamento entre os pontos da malha, para $G = 2.33$, é de 10 metros e o intervalo de amostragem temporal para $\mu = 0,07$ é igual a 0,00027.

De acordo com as Figuras 5.14(b) e 5.14(c), o campo gerado pela 8ª ordem convencional obteve um desvio do resultado comparado com o valor de referência, devido a dispersão numérica. Em contra partida, a 12ª ordem convencional e a

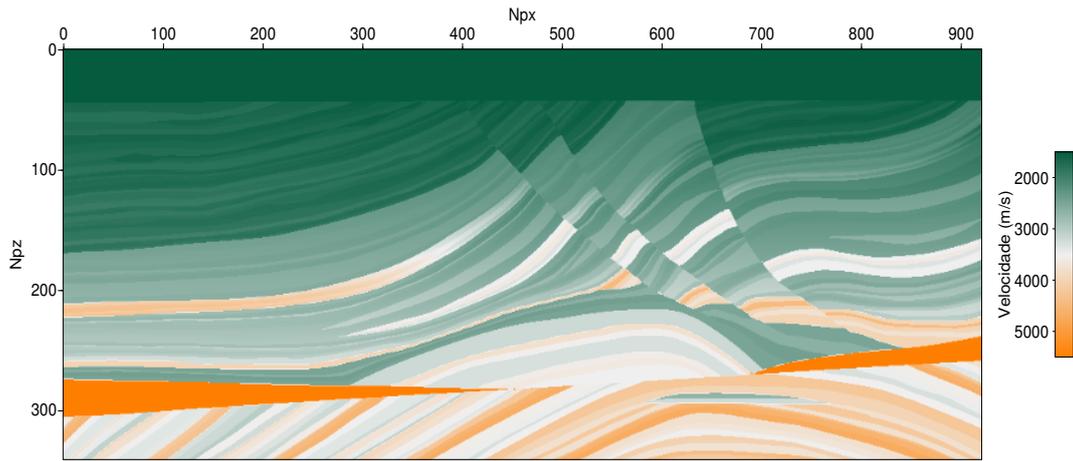
8ª ordem otimizada obtiveram quase o mesmo campo de onda registrado pela 36ª ordem. Isso indica que para a mesma ordem e o mesmo espaçamento entre a malha, o método otimizado apresenta maior precisão que o método convencional. Esses resultados reforçam as teorias e análises numéricas dos capítulos anteriores.

Na Figura 5.15(a), tem-se a imagem do modelo marmousi reamostrado utilizado na avaliação de 12ª ordem. Observa-se que o número de pontos do modelo ($Np_x = 768$ e $Np_z = 284$), reduziu em relação à avaliação da precisão de 8ª ordem, pois ocorreu uma redução no espaçamento da malha. A Figura (5.14(b) e 5.14(c)) são os resultados do registro de um receptor situado na posição (6,99 km, 315 m). A fonte sísmica foi inserida no modelo na posição (4,606 Km, 315 m). A frequência de corte utilizada na modelagem foi de 50Hz e o intervalo de amostragem temporal para $\mu = 0,054$ é igual a 0,000147. O espaçamento entre os pontos da malha, para $G = 2$ é de 15m .

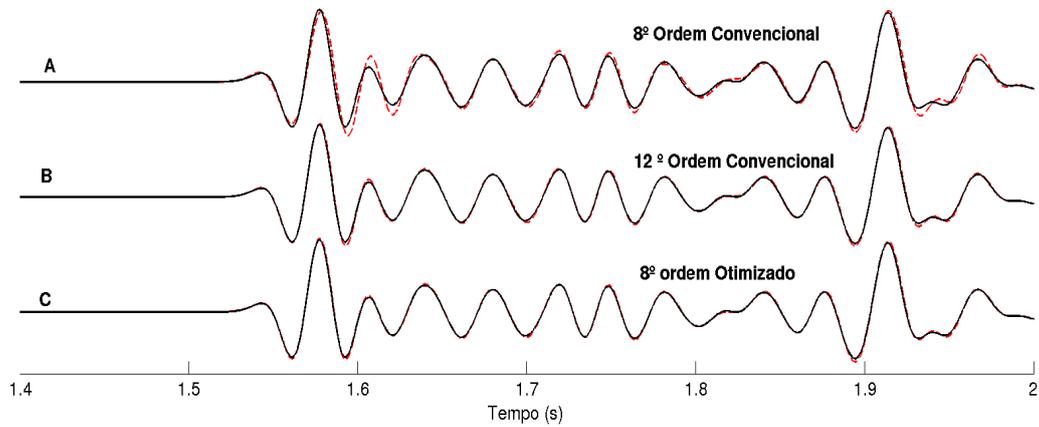
O resultado encontrado para a avaliação da precisão de 12ª ordem demonstrou novamente, conforme observado na Figura 5.15, que o método otimizado é mais preciso que o convencional, comparando a mesma ordem e o mesmo espaçamento da malha. As Figuras (5.14(b) e 5.14(c)) comprovam essa afirmação, observa-se que o traço A obteve um desvio significativo em relação ao resultado da 36ª ordem, principalmente para os intervalos entre $1,5\text{s} - 1,6\text{s}$ e $1,7\text{s} - 2\text{s}$. Em contrapartida, os resultados referente à 12ª ordem otimizada e a 24ª ordem convencional obtiveram quase o mesmo resultado da 36ª ordem.

O terceiro e último teste feito para avaliação da 16ª ordem no modelo marmousi (Figura 5.16(a)) pode ser observado na Figura 5.16, onde o número de pontos é $Np_x = 614$ e $Np_z = 227$. O receptor está situado na posição (12,82 km, 462 m). Observa-se nas Figuras 5.16(b) e 5.16(c) o registro dos intervalos entre $1,4\text{s} - 2\text{s}$ e $1,9\text{s} - 2,4\text{s}$. O espaçamento entre os pontos da malha, para $G = 2.0$ é de 12m . A frequência de corte utilizada foi de 60Hz e o intervalo de amostragem temporal para $\mu = 0.048$ é igual a 0.000104. Para o traço A do primeiro intervalo, que corresponde ao método convencional, visualiza-se um desvio muito significativo do registro da 36ª ordem. O registro do método otimizado contido no traço B, obteve praticamente o mesmo resultado da 36ª ordem convencional.

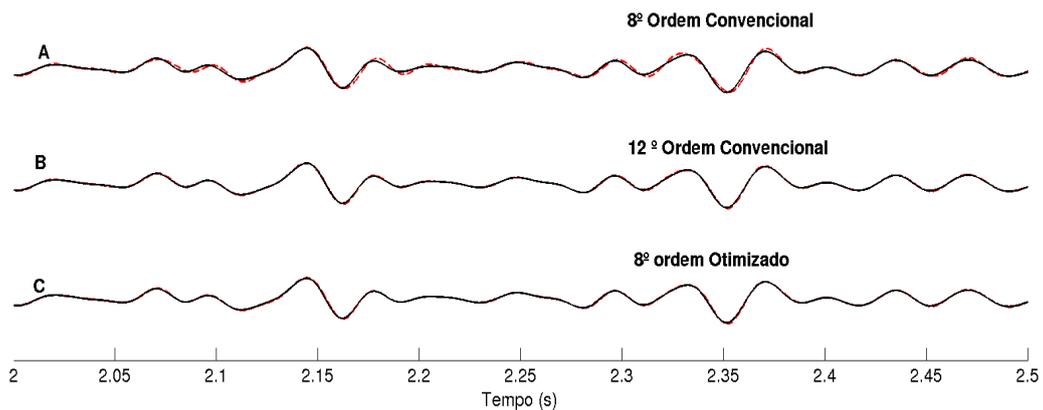
Os resultados do método otimizado apresentaram nos 3 testes uma elevada precisão frente o método convencional. Ressalta-se que, para a mesma ordem, esse ganho de precisão foi obtido com o mesmo custo computacional. Para fins de comprovação de precisão, foi utilizado para uma dada ordem os critérios de estabilidade referente aos coeficientes otimizados, visto que, o valor do espaçamento entre a malha aumenta e o intervalo temporal diminui em relação ao método convencional.



(a) Modelo de velocidades Marmousi modificado para avaliação da 8ª ordem com $Np_x = 921$ e $Np_z = 341$.

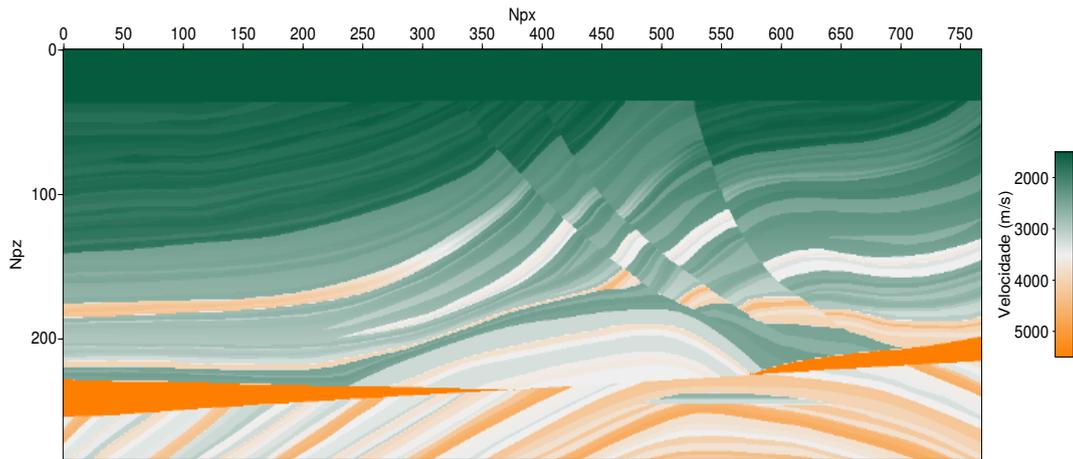


(b) Comparação da precisão entre diferentes métodos para o intervalo temporal de 1.4 s à 2 s.

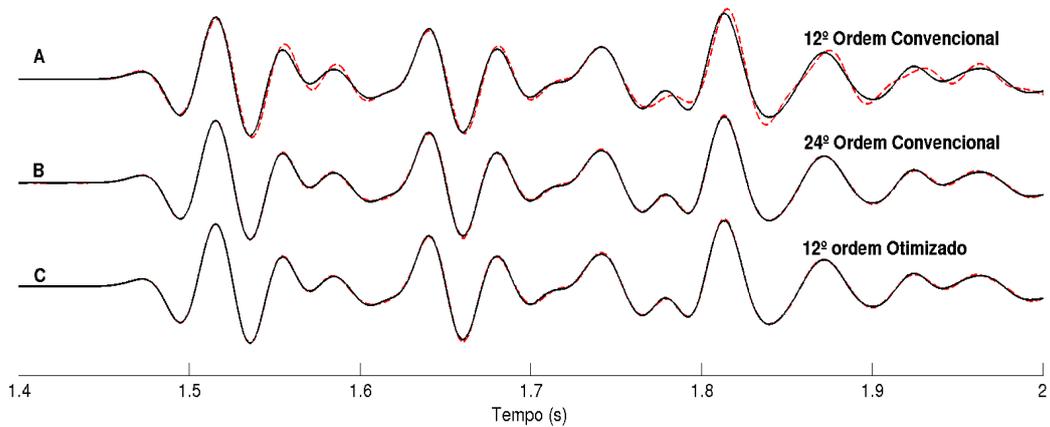


(c) Comparação da precisão entre diferentes métodos para o intervalo temporal de 2 s à 2.5 s.

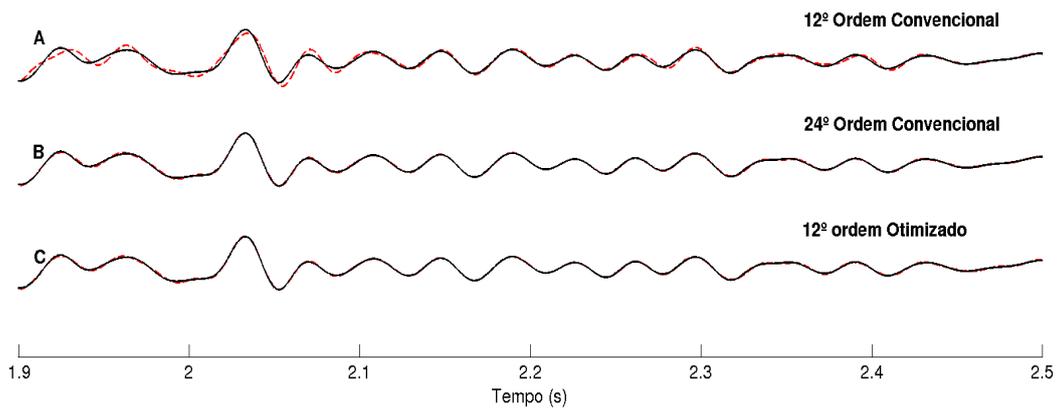
Figura 5.14: Avaliação da precisão de 3 diferentes ordens do operador de DF. O registro contínuo representa a 36ª ordem do operador.



(a) Modelo de velocidade Marmousi modificado para avaliação da 12^a ordem com $Np_x = 768$ e $Np_z = 284$.

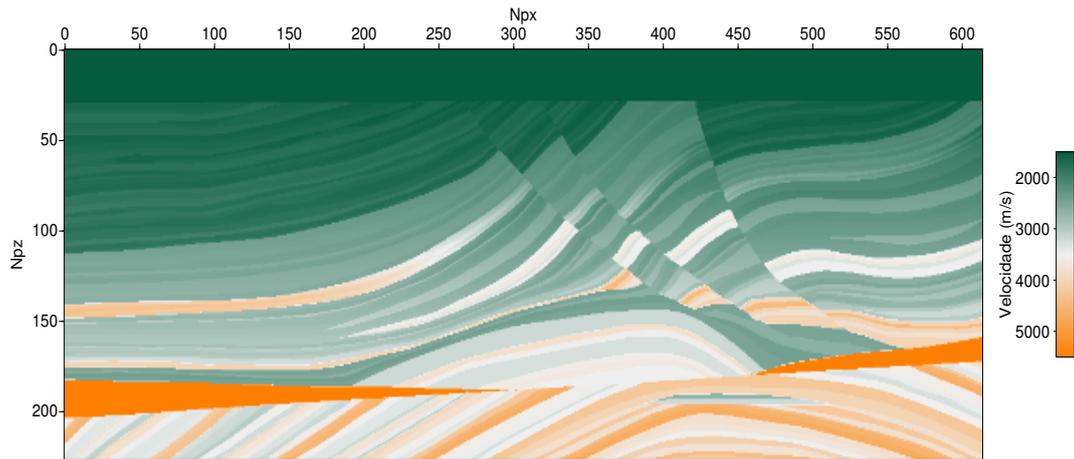


(b) Comparação da precisão entre diferentes métodos para o intervalo temporal de 1.4 s à 2 s.

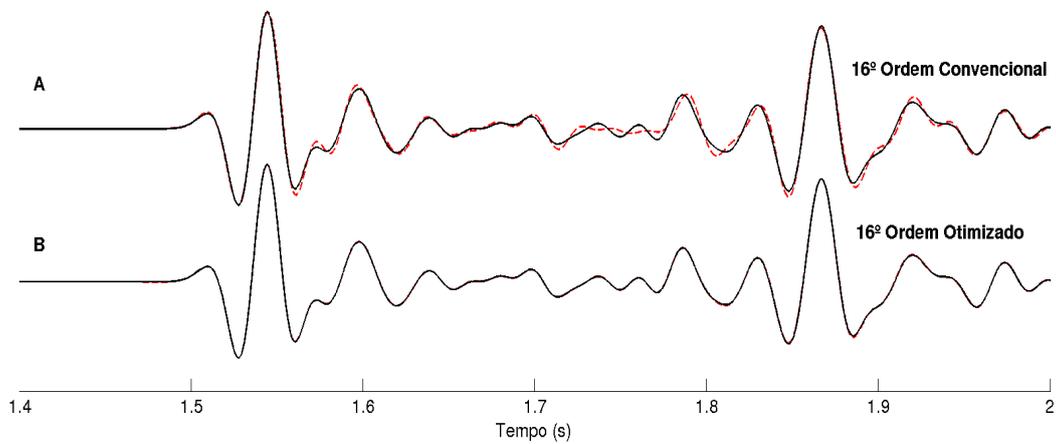


(c) Comparação da precisão entre diferentes métodos para o intervalo temporal de 2 s à 2.5 s.

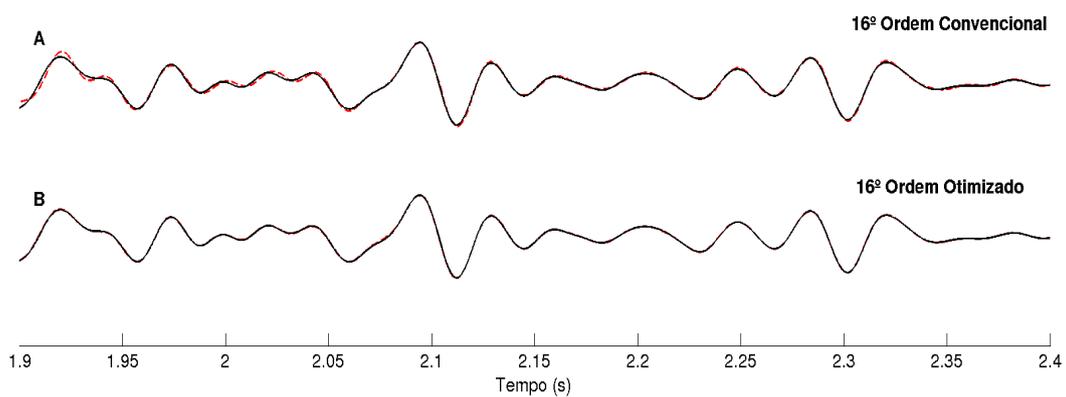
Figura 5.15: Avaliação da precisão de 3 diferentes ordens do operador de DF. O registro contínuo representa a 36^a ordem do operador.



(a) Modelo de velocidade Marmousi modificado para avaliação da 16^a ordem com $Np_x = 614$ e $Np_z = 227$.



(b) Comparação da precisão entre diferentes métodos para o intervalo temporal de 1.4 s à 2 s.



(c) Comparação da precisão entre diferentes métodos para o intervalo temporal de 2 s à 2.5 s.

Figura 5.16: Avaliação da precisão de 3 diferentes ordens do operador de DF. O registro contínuo representa a 36^a ordem do operador.

5.3 Avaliação Computacional

Essa seção tem como objetivo avaliar diferentes ordens do MDF comparando o custo de memória e o tempo computacional, aqui definido como o tempo de cálculo de ponto flutuante da equação da onda. De posse destas avaliações é possível concluir qual a melhor ordem de discretização para uma específica modelagem ou migração.

O modelo utilizado para análise possui dimensões fixas de $48000m$ de distância por $32000m$ de profundidade. Todas as comparações tomaram como referência a modelagem de 4ª ordem convencional e foram geradas no limite do critério de estabilidade e dispersão.

Conforme descrito na Figura 5.17, pode-se perceber claramente a redução da demanda de memória, a medida que cresce a ordem de discretização, tal resultado já era esperado, visto que, ocorre um decréscimo no número de pontos por comprimento de onda com o aumento da ordem. Comparando os resultados gerados pelo método convencional e o otimizado, verifica-se para uma dada ordem, que o método otimizado esteve sempre a frente do convencional. A 16ª ordem otimizada teve uma menor demanda de memória que a 36ª ordem convencional, chegando a uma redução de 80% comparado com a 4ª ordem convencional, sendo a ordem com menor custo de memória dentre as analisadas.

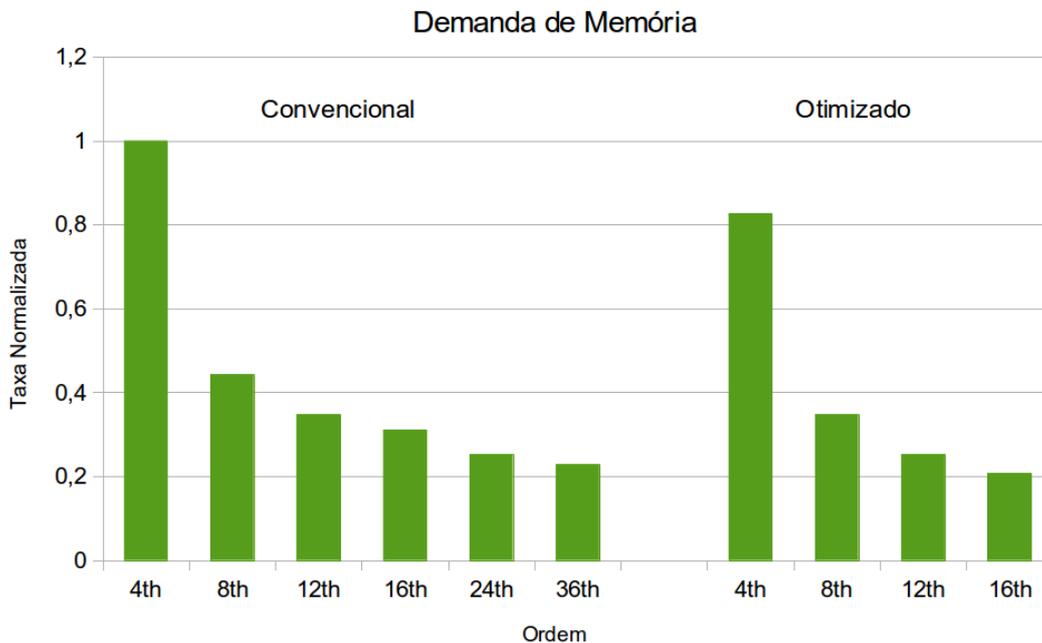


Figura 5.17: Resultado da demanda de memória para diferentes ordens de discretização empregadas na modelagem acústica 2D.

Já o limite do passo de tempo gerado pela análise de estabilidade, ao contrário da análise da demanda de memória, diminui com o crescimento da ordem. Isso se

deve ao fato da constante de estabilidade μ decrescer com o crescimento da ordem. Esse fato implica diretamente no aumento da quantidade de iterações temporais e na variação do estêncil do operador. Sua variação está relacionada com o aumento ou não das operações aritméticas, para um intervalo temporal, o que implica diretamente no aumento do tempo final da modelagem. Por esse motivo, houve a necessidade de comparar o desempenho quanto ao tempo computacional total da modelagem, utilizando o método convencional e o método otimizado, levando-se em consideração o intervalo temporal e o aumento do estêncil do operador.

Na Figura 5.18 encontram-se os resultados da análise do tempo computacional para diferentes ordens do método convencional quanto para o otimizado. Nela verifica-se que tanto para o método convencional e o método otimizado, a 8ª ordem teve melhor resultado, dentre as ordens analisadas. Porém para o método otimizado a 8ª ordem teve um custo mais elevado que o convencional, em virtude de ter um menor intervalo de amostragem temporal.

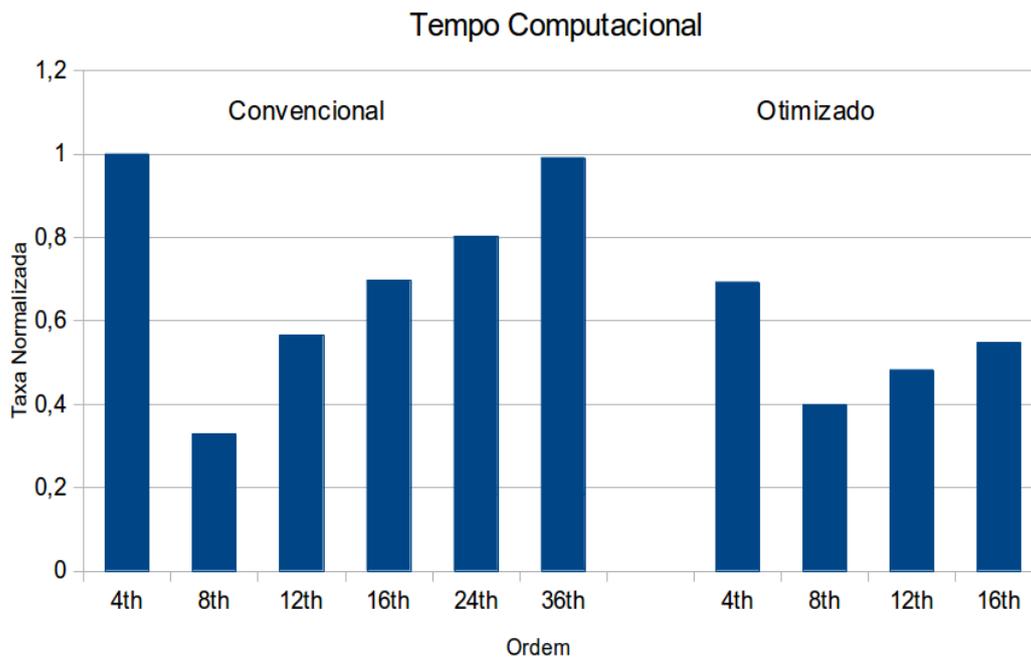


Figura 5.18: Resultado do tempo computacional para diferentes ordens de discretização empregadas na modelagem acústica 2D.

Para as ordens mais elevadas, o método otimizado apresentou sempre redução acima de 60% em relação a 4ª ordem, representando uma excelente escolha para quem deseja obter uma melhor precisão em menor tempo. A utilização do MDF otimizado alcança simultaneamente duas importantes reduções, a demanda de memória e o custo do tempo de processamento.

5.4 Migração RTM

O objetivo nesta seção é avaliar a influência do ganho computacional na migração reversa no tempo. Como o resultado da análise computacional para modelagem mostrou que a 16ª ordem otimizada obteve a maior redução na demanda de memória e considerando que o tempo de modelagem total teve uma redução significativa, para avaliar a RTM utilizando a 16ª ordem otimizada foi realizada a migração para a 4ª e 16ª ordem convencional e 16ª otimizada.

A condição de imagem utilizada na RTM foi a correlação cruzada e para eliminar os artefatos que podem distorcer as imagens em profundidade a imagem migrada foi dividida pela autocorrelação do campo de ondas ascendentes. Foi aplicado o operador Laplaciano na imagem final (SILVA, 2012).

O modelo utilizado para modelagem dos dados foi o Marmousi com dimensões de 9210 m por 3410 m (Figura 5.19) e o tempo de registro foi de 4 s.

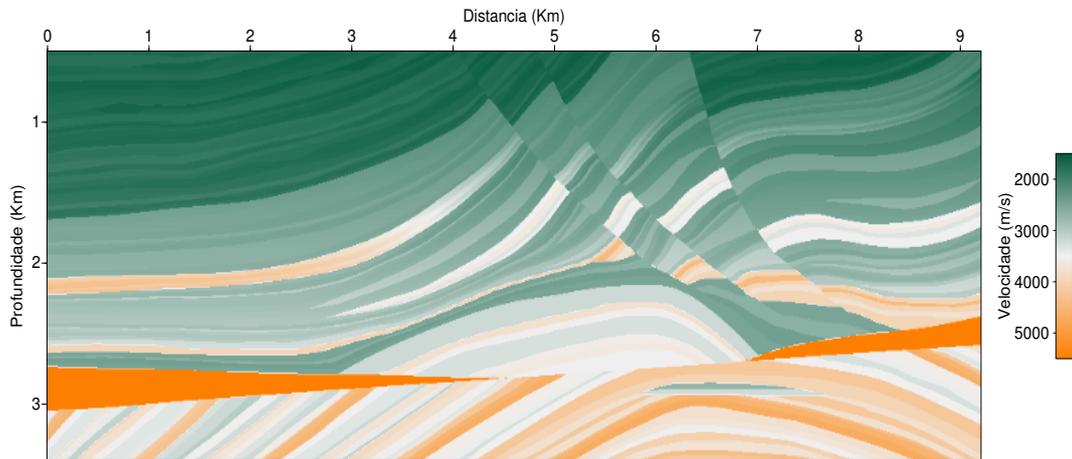


Figura 5.19: Modelo de velocidade utilizado na RTM para avaliar o operador de 4ª ordem convencional.

Os parâmetros envolvidos em cada RTM encontram-se nas Tabelas (5.6 e 5.7), em que C é a convencional e O a otimizada. A primeira análise foi realizada utilizando o operador de 4ª ordem convencional. O resultado da migração pode ser observado na Figura 5.20. O tempo total para esta migração foi de 40 min.

Tabela 5.6: Parâmetros para RMT.

Velocidade máxima do meio	5500m/s
Velocidade mínima do meio	1500m/s
Frequência de corte	30Hz

A segunda análise foi realizada utilizando o operador de 16ª ordem convencional. O resultado da migração pode ser observado na Figura 5.21 . O tempo total

Tabela 5.7: Parâmetros para RMT.

	G	μ	$h(m)$	$dt(s)$
<i>C4</i>	5	0,23	10	0,00036
<i>C16</i>	2,7	0,071	18	0,00023
<i>O16</i>	2,3	0,048	22	0,00018

para esta migração foi de 16 min.

A ultima análise para RTM foi realizada utilizando o operador de 16^a ordem otimizada. A seção migrada pode ser observada na Figura 5.22. O tempo para migração de 16^a ordem otimizada foi de 13 min, esse resultado foi aproximadamente 4 vezes menor que a 4^a ordem convencional e cerca de 10% a menos que a 16^a ordem convencional.

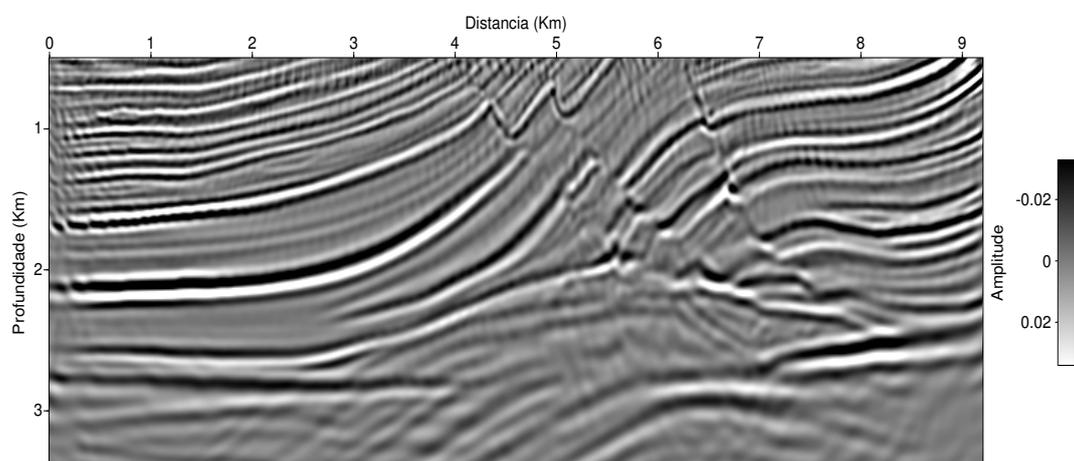


Figura 5.20: Resultado da RTM utilizando o operador de 4^a ordem convencional.

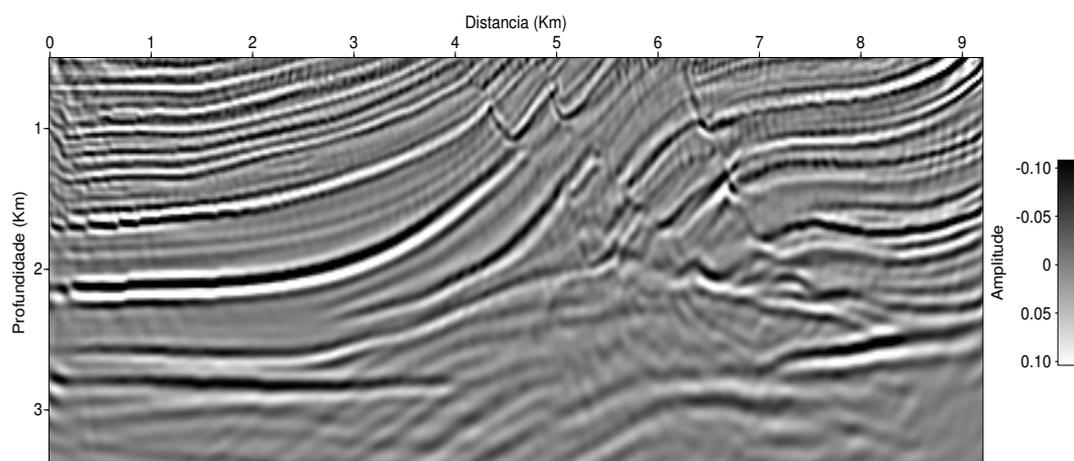


Figura 5.21: Resultado da RTM utilizando o operador de 16^a ordem convencional.

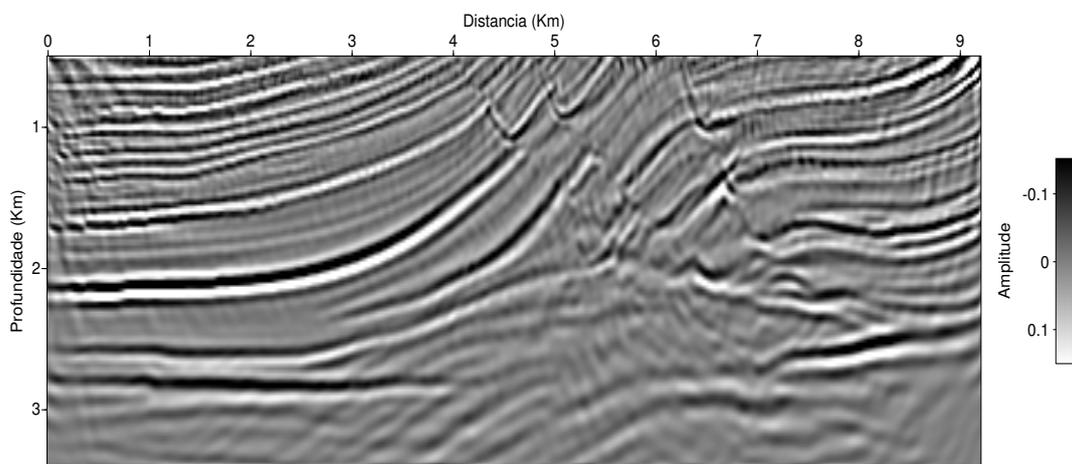


Figura 5.22: Resultado da RTM utilizando o operador de 16^a ordem otimizada.

Capítulo 6

Conclusão

6.1 Resultados

Nesse trabalho foram empregadas as altas ordens do MDF e o operador otimizado para obtenção de uma melhor precisão e eficiência, utilizando para isso uma metodologia não convencional. Foi comprovado através dos resultados numéricos, que as altas ordens do MDF se aproximam do resultado analítico, com um menor custo de memória e tempo computacional, em relação ao método convencional.

A primeira avaliação do novo operador, através da equação do erro espectral, avaliou diferentes funções janela utilizando uma limitação do erro de 0,0001. O resultado alcançado demonstrou a superioridade dos novos operadores em relação ao operador convencional. Através da variação dos parâmetros das diferentes funções janela, foram obtidos uma variedade de coeficientes otimizados empregados no operador de DF. A partir da décima ordem foi alcançada uma precisão superior em relação ao operador convencional.

Empregando os coeficientes *Scaled Binominal Window* otimizado no operador de DF e comparando com os melhores coeficientes encontrados, a partir da variação dos parâmetros das diferentes funções janela, foi comprovado que a precisão dos coeficientes otimizados são maiores para todas as ordens. Ressalta-se que os resultados dessa avaliação estão em conformidade com os resultados encontrados por ZHANG e YAO (2013).

O resultado da precisão do operador com expansão de 8^a ordem otimizada foi a mesma da expansão de 12^a ordem convencional. O mesmo se repetiu para 12^a ordem otimizada, em que foi alcançada a mesma precisão da 24^a ordem convencional e de forma equivalente, a expansão de 16^a otimizada alcançou um resultado acima da 36^a ordem convencional. Isso reflete a importância do operador otimizado e demonstram sua maior precisão em relação ao operador convencional.

No entanto, essa avaliação foi feita apenas levando em consideração o emprego

dos coeficientes na aproximação do operador de DF, como o operador foi utilizado no modelo matemático empregado na modelagem sísmica, a análise da velocidade de fase da onda também foi realizada. Para isso utilizou-se a teoria da análise de dispersão e estabilidade, onde se emprega a solução da onda plana harmônica na discretização da equação.

Embora essa metodologia seja muito utilizada pela literatura, não encontramos a consideração do limite de erro para estimar o parâmetro de estabilidade μ de forma clara, tal parâmetro influencia significativamente na equação responsável por gerar o parâmetro G , parâmetro este importante, afim de se obter uma melhor propriedade de dispersão.

Conforme apresentado no Capítulo 3, foi utilizada uma metodologia para gerar os parâmetros de dispersão e estabilidade, que pode ser aplicada a todas as ordens do MDF. Ressalta-se que tais parâmetros na literatura são gerados de forma empírica.

Utilizando esse critério, foi avaliada a curva de dispersão para diferentes ordens do operador convencional e otimizado, que chegou a um resultado muito similar a avaliação do erro espectral do operador. Foi encontrado, para a análise da velocidade de fase normalizada, um G para expansão de 8ª ordem otimizada equivalente a 12ª ordem convencional, para a 12ª ordem otimizada, o mesmo da 24ª ordem convencional e para a 16ª ordem otimizada, um G menor do que a 36ª ordem convencional. O parâmetro G encontrado para o operador de 16ª ordem foi de 2,3, comprovando que as altas ordens do MDF otimizado se aproximam do método Pseudospectral.

Após as avaliações da precisão, foram gerados resultados para diferentes ordens do MDF empregando o operador convencional e o otimizado na Modelagem acústica da Onda. Os testes mostraram a superioridade do método otimizado frente ao convencional. Foi aplicada a modelagem sobre o modelo complexo Marmousi. Foram comparados a 8ª, 12ª e 16ª ordens otimizada e convencional com a 36ª ordem convencional, os resultados comprovaram a melhor precisão do método otimizado.

Os testes realizados no modelo homogêneo e no Marmousi tiveram como objetivo avaliar de forma prática a precisão do método otimizado. O próximo passo foi avaliar o desempenho do novo método no que diz respeito ao custo computacional. Sendo assim, observando os resultados gerados com base em um modelo homogêneo de dimensões fixas e velocidade constante de $1500m/s$, pode-se afirmar que o método otimizado é superior ao convencional tanto em relação à demanda de memória, quanto em relação ao tempo computacional.

Tomando como referência a expansão de 4ª ordem foi alcançado, com a utilização da metodologia adotada nesse trabalho, uma redução de memória de aproximadamente 80% acompanhada de uma redução de aproximadamente 42% do tempo

computacional. Nessa avaliação, o modelo foi reamostrado e o tempo computacional, levado em consideração foi em relação às operações de ponto flutuante da discretização da equação da onda.

A migração reversa no tempo utilizando o operador de 16^a ordem otimizado apresentou $\frac{1}{10}$ do tempo total da migração utilizando a 16^a ordem convencional e $\frac{1}{5}$ do tempo total da 4^a ordem convencional. Ressalta-se que o modelo utilizado na modelagem para a 16^a ordem convencional e otimizada foi reamostrado e a precisão da imagem migrada foi afetada.

6.2 Trabalhos Futuros

Como extensão deste trabalho, têm-se as seguintes sugestões para a realização de trabalhos futuros:

Utilizar os coeficientes otimizados na Modelagem Acústica 3D.

Utilizar técnicas de otimização, para minimizar o erro das diferentes funções janela.

Aplicar a metodologia utilizada nesse trabalho, para a Equação Elástica da Onda, utilizando a equação do erro, para análise da derivada primeira empregando diferentes funções janela.

Aplicar os coeficientes otimizado na modelagem VTI e TTI.

Referências Bibliográficas

- ALFORD, R. M., KELLY, K. R., BOORE, D. M., 1974, “Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation”, *Geophysics*, v. 39, n. 6, pp. 834–842.
- BAYSAL, E., KOSLOFF, D. D., SHERWOOD, J. W. C., 1983, “Reverse Time Migration”, *Geophysics*, v. 48, pp. 1514–1524.
- BOECHAT, J. T. B., 2007, *Migração Reversa no Tempo 3-D Orientada ao Alvo por Síntese de Frentes de Onda*. Tese de Doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Junho.
- BOTELHO, M. A. B., STOFFA, P. L., 1991, “Finite-Difference Reverse Time Migration of Multiconfiguration Marine Seismic Data”, *2nd International Congress of The Brazilian Geophysical Society held in Salvador*.
- BRACEWELL, R., 1986, *The Fourier Transform and Its applications*.
- BULCÃO, A., 2004, *Modelagem e Migração Reversa no Tempo Empregando Operadores Elásticos e Acústicos*. Tese de Doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Outubro.
- CARCIONE, J. M., 1999, “Staggered mesh for the anisotropic and viscoelastic wave equation”, *Geophysics*, v. 64, pp. 1863–1866.
- CARCIONE, J. M., KOSLOFF, D., BEHLE, A., et al., 1992, “A spectral scheme for wave propagation simulation in 3-D elastic-anisotropic media”, *Geophysics*, v. 57, pp. 1593–1607.
- CARCIONE, J. M., HERMAN, G. C., P.E., K., 2002, “Seismic modeling”, *Geophysics*, v. 67, pp. 1304–1325.
- CERJAN, C., KOSLOFF, D., RESHEF, M., 1985, “A Nonreflecting Boundary Condition for Discrete Acoustic and Elastic Wave Equations”, *Geophysics*, v. 50, pp. 705–708.

- CHANG, W., MCMECHAN, G., 1986, “Reverse-Time Migration of Offset Vertical Seismic Profiling Data Using the Excitation Time Imaging Condition”, *Geophysics*, v. 51, pp. 67–84.
- CHU, C., STOFFA, P. L., 2012, “Determination of finite-difference weights using scaled binomial windows”, *Geophysics*, v. 77, pp. 57–67.
- CHU, C., STOFFA, P. L., SEIF, R., 2009, “High-order rotated staggered finite difference modeling of 3D elastic wave propagation in general anisotropic media”, *79th Annual International Meeting SEG*, v. 28, pp. 291–295.
- CLAERBOUT, J., 1971, “Toward a unified theory of reflector imaging”, *Geophysics*, v. 36, pp. 469–481.
- CLAERBOUT, J., 1985, *Imaging the earth’s interior*. Inc, Blackwell Scientific Publications.
- CUNHA, P. E. M., 1999, “Numerical Phase/Group Velocity Anisotropy In Finite Difference Modeling And Migration”, *SBGF*.
- DI BARTOLO, L., 2010, *Modelagem Sísmica Anisotrópica Através do Método das Diferenças Finitas Utilizando Sistemas de Equações de Segunda Ordem*. Tese de Doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Outubro.
- DUARTE, F. S., 2012, *Modelagem Acústica no Domínio da Frequência através do emprego de Diferentes Esquemas de Diferenças Finitas*. Tese de Mestrado, UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Setembro.
- DUARTE, W. S., 2011, *Uma metodologia para extrapolação de ângulo de reflexão em profundidade utilizando matrizes de tempo de trânsito*. Tese de Doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Fevereiro.
- FARIA, E. L., 1986, *Migração antes do empilhamento utilizando propagação reversa no tempo*. Tese de Mestrado, UFBA, Salvador-Bahia, Abril.
- FICHMAN, S., 2005, *Modelagem Sísmica em Meios Acústicos, Elásticos e Poroe-lásticos*. Tese de Mestrado, UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Junho.
- FORNBERG, B., 1987, “The pseudospectral method: Comparasions with finite differences for tje elastic wave equation”, *Geophysics*, v. 52, pp. 483–501.
- FORNBERG, B., 1998, “Calculation of weights in finite difference formulas: SIAM Rewiew”, *Geophysics*, v. 40, pp. 685–691.

- GAZDAG, J., 1981, “Modeling of the acoustic wave equation with transform methods”, *Geophysics*, v. 46, pp. 854–859.
- GRAY, S. H., ETGEN, J., DELLINGER, J., et al., 2001, “Seismic Migration Problems and Solutions”, *Geophysics*, v. 66, pp. 1622–1640.
- HOLBERG, O., 1987, “Computational aspects of the choice of operator and sampling interval for numerical differentiation in large-scale simulation of wave phenomena”, *Geophysical Prospecting*, v. 35, pp. 629–655.
- IGEL, H. P., MORA, P., RIOLLET, B., 1995, “Anisotropic wave propagation through finite-difference grids”, *Geophysics*, v. 60, pp. 1203–1216.
- JIN, Q., SHIGUO, W., RUOFEI, C., 2013, “Accuracy of the staggered-grid finite-difference method of the acoustic wave equation for marine seismic reflection modeling”, *Chinese Journal of Oceanology and Limnology*, v. 31, pp. 169–177.
- KAELIN, B., GUITTON, A., 2006, “Imaging Condition for Reverse Time Migration”, *SEG*.
- KOSLOFF, D., BAYSAL, E., 1982, “Forward modeling by a Fourier method”, *Geophysics*, v. 47, pp. 1402–1412.
- KOSLOFF, D., BAYSAL, E., LOEWENTHAL, D., 1984, “Elastic wave calculations by the Fourier method”, *Bulletion of the Seismological Society of America*, v. 74, pp. 875–891.
- LEVANDER, A. R., 1988, “Fourth-order finite-difference P-SV seismograms”, *Geophysics*, v. 53, pp. 1425–1436.
- LIU, Y., SEN, Y. M., 2009a, “A new time-space domain high-order finite-difference method for the acoustic wave equation”, *Journal of Computational Physics*, v. 228, pp. 8779–8806.
- LIU, Y., SEN, Y. M., 2009b, “Numerical modeling of wave equation by a truncated high-order finite-difference method”, *Earthquake Science*, v. 228, pp. 8779–8806.
- LOEWENTHAL, D., STOFFA, P. L., FARIA, E. L., 1987, “Suppressing the Unwanted Refletions of the Full Wave Equation”, *Geophysics*, pp. 1007–1012.

- LOEWENTHAL, D., HU, L., 1991, “Two Methods for Computing the Imaging Condition for Common-Shot Pre-Stack Migration”, *Geophysics*, v. 58, pp. 378–381.
- MUFTI, I. R., 1990, “Large-scale three-dimensional seismic models and their interpretive significance”, *Geophysics*, v. 55, pp. 1166–1182.
- NORMAN, R., 1953, “The form and laws of propagation of seismic wavelets”, *Geophysics*, v. 18, n. 1, pp. 10–40.
- PINHEIRO, S. T., 2007, *Estudo Comparativo entre Dois Métodos de Migração - RTM e PSPI - Aplicado a Modelos Acústicos*. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Julho.
- RESHEF, M., AND EDWARDS M., K. D., C., H., 1988a, “Three-dimensional acoustic modeling by the Fourier method”, *Geophysics*, v. 53, pp. 1175–1183.
- RESHEF, M., AND EDWARDS M., K. D., C., H., 1988b, “Three-dimensional elastic modeling by the Fourier method”, *Geophysics*, v. 53, pp. 1184–1193.
- REYNOLDS, A., 1978, “Boundary conditions for numerical solution of wave”, *Geophysics*, v. 43, pp. 1099–1110.
- ROBERTS, R. A., MULLIS, C. T., 1987, *Digital Signal Processing*. Massachusetts, Addison-Wesley.
- SILVA, J. S., 2009, *Migração Reversa no Tempo na Determinação das Amplitudes de Reflexão em Função do Ângulo de Incidência*. Tese de Doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Maio.
- SILVA, K. C., 2012, *Modelagem, Migração Reversa no Tempo e Estudos de Iluminação Empregando o Conceito de dados Sísmicos Blended*. Tese de Mestrado, UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Março.
- VIRIEUX, J., 1986, “SH-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method”, *Geophysics*, v. 51, pp. 889–901.
- YILMAZ, O., 2001, *Seismic Data Analysis*. Tulsa, Society of Exploration Geophysicists.
- ZHANG, J. H., YAO, Z. X., 2013, “Optimized finite-difference operator for broadband seismic wave modeling”, *Geophysics*, v. 78, pp. 1–6.

- ZHOU, B., GREENHALGH, S. A., 1992, "Seismic scalar wave equation modeling by a convolutional differentiator", *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 82, pp. 289–303.
- ZHOU, B., GREENHALGH, S. A., ZHE, J., 1993, "Numerical seismogram computations for inhomogeneous media using a short, variable length convolutional differentiator", *Geophysical Prospecting*, v. 41, pp. 751–766.

Apêndice A

Equação Acústica da Onda

A equação acústica da onda é uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem, descrita pelo campo de pressão e o vetor deslocamento da partícula.

A equação da onda pode ser descrita a partir das leis de Newton e de Hooke, que relacionam a pressão e a velocidade.

Pela lei de Hooke tem-se:

$$P = -k \nabla \cdot \vec{u} \quad (\text{A.1})$$

Em que P é o campo de pressão, k o módulo de incompressibilidade e \vec{u} é o deslocamento da partícula.

Pela lei de Newton tem-se que:

$$\rho \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -\nabla P, \quad (\text{A.2})$$

em que ρ representa a densidade do meio.

Tomando a derivada segunda em relação ao tempo da equação (A.1), supondo k constante e invertendo os operadores de derivação, tem-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P = -k \left[\nabla \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{u} \right) \right]. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo a segunda lei de Newton (A.2) na equação (A.3), teremos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P = -k \left[\nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho} \nabla P \right) \right]. \quad (\text{A.4})$$

De acordo com a lei de Leibniz, o gradiente de $\frac{1}{\rho}$ é dado por:

$$\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{\nabla \rho}{\rho^2}. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo a equação (A.5) na equação (A.4), desconsiderando o sinal ne-

gativo da expressão e utilizando as propriedades de divergente, tem-se que:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P = k \left(-\frac{\nabla \rho}{\rho^2} \cdot \nabla P + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla P \right) \quad (\text{A.6})$$

Na equação escalar da onda o módulo de elasticidade, sendo C a velocidade do meio, pode ser escrito como:

$$k = \rho C^2 \quad (\text{A.7})$$

Substituindo a equação A.7 em A.6, temos:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P = \rho C^2 \left(-\frac{\nabla \rho}{\rho^2} \cdot \nabla P + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla P \right) \quad (\text{A.8})$$

Sendo $\nabla \cdot \nabla P = \nabla^2 P$, podemos substituir na equação (A.6) e reorganizar, de modo a obter:

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P = \nabla^2 P - \frac{1}{\rho} \nabla \rho \cdot \nabla P. \quad (\text{A.9})$$

Considerando ρ constante, o segundo termo do lado direito da equação (A.9) torna-se nulo. Sendo assim obtém-se a equação (A.10), a Equação Acústica da Onda com densidade constante:

$$\nabla^2 P = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P. \quad (\text{A.10})$$

Desenvolvendo o Laplaciano da equação (A.10) em duas dimensões, tem-se então a Equação Acústica da Onda bidimensional com densidade constante:

$$\frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial t^2}. \quad (\text{A.11})$$

onde $P(x, z, t)$ é o campo de pressão da onda, x e z são coordenadas espaciais, t é a coordenada temporal e C é a velocidade de propagação do meio.

Para o problema geofísico existe ainda a necessidade de se preescrever o termo fonte, denotado por $f(t)\delta(x - x_f)\delta(z - z_f)$, sendo assim teremos:

$$\frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial t^2} + f(t)\delta(x - x_f)\delta(z - z_f). \quad (\text{A.12})$$

onde (x_f, z_f) representa o ponto de aplicação da fonte sísmica e δ o delta de Dirac. Em função da discretização, tem-se as coordenadas discretas:

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow i\Delta x, \\ z &\longrightarrow j\Delta z, \\ t &\longrightarrow \bar{n}\Delta t. \end{aligned}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) &\longrightarrow P_{i,j}^{\bar{n}} \\ f(t) &\longrightarrow f^{\bar{n}}, \end{aligned}$$

onde $i = 1, 2, \dots, I_{total}$, $j = 1, 2, \dots, J_{total}$ e $\bar{n} = 1, 2, \dots, \bar{N}_{total}$.

e Δx , Δz e Δt são os respectivos espaçamentos da malha na direção x , z e temporal, \bar{N} é número total de passos em tempo. Isto permitirá escrever as derivadas existentes na equação (A.12) de forma discreta através dos operadores de DF.

Destaca-se que no caso da geofísica, as condições iniciais são dadas por:

$$P_{i,j}^0 = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{i,j}^0 = 0, \quad (\text{A.14})$$

enquanto as condições de contorno, as mais comuns em levantamentos sísmicos, são a condição de contorno essencial (Dirichlet), que corresponde a prescrever a pressão

$$P_{i,j}^{\bar{n}} = 0, \quad (\text{A.15})$$

e a condição de contorno natural (Neumann), que consiste em especificar o valor da derivada (ou da taxa de modificação) de P na direção normal ao contorno, dada por:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_{i,j}^{\bar{n}} = 0, \quad (\text{A.16})$$

onde η corresponde à normal externa ao referido contorno.

A condição de contorno essencial é bastante utilizada na modelagem para simular adequadamente as reflexões na superfície do mar e do solo na geração de dados sísmicos marinhos e terrestres, respectivamente.

Apêndice B

Equação Elástica da Onda

As equações que regem o fenômeno de propagação de ondas elásticas para determinado ponto material em um meio elástico podem ser representadas em termos tensoriais como:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \tau_{ij,j} + \rho f_i \\ \tau_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\ \tau_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \omega_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})\end{aligned}\tag{B.1}$$

em que,

u_i - representa o vetor deslocamento

τ_{ij} - representa o tensor de tensões

ε_{ij} -representa o tensor de deformação

ω_{ij} -representa o tensor de rotação

Representando a equação (B.1) em termos dos deslocamentos das partículas obtém-se as equações de movimento chamadas de equação de Navier.

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i\tag{B.2}$$

A expressão vetorial equivalente à equação (B.2) é dada por:

$$(\lambda + \mu)\nabla^2 \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho f = \rho \ddot{u}\tag{B.3}$$

Em termos de notação escalar para 3D, em coordenadas retangulares, pode-se

representar as equações de movimento como:

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) + \nabla^2 u_x + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (\text{B.4})$$

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} \right) + \nabla^2 u_y + \rho f_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \quad (\text{B.5})$$

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{z^2} \right) + \nabla^2 u_z + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (\text{B.6})$$

Reorganizando e agrupando os termos da equação (B.4) temos:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right] \quad (\text{B.7})$$

Para meios elásticos isotrópicos, os tensores relacionados às tensões, podem ser definidos em função do parâmetro de Lamè (λ) e do módulo de cisalhamento (μ) como:

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \quad (\text{B.10})$$

Substituindo (B.8),(B.9),(B.10) em (B.7) teremos:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (\text{B.11})$$

Reorganizando os termos da equação (B.5) temos:

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right] \quad (\text{B.12})$$

Os termos relacionados as tesões são definidos como:

$$\tau_{yy} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (\text{B.13})$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad (\text{B.14})$$

O vetor τ_{xy} já foi definido em (B.9). Substituindo as equações (B.9),(B.13) e (B.14) em (B.12) temos:

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (\text{B.15})$$

Reorganizando e agrupando os termos da equação (B.6) teremos:

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right] \quad (\text{B.16})$$

Os tensores relacionados às tensões podem ser definidos como:

$$\tau_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \quad (\text{B.17})$$

Substituindo as equações (B.10),(B.14) e (B.17) em (B.16) teremos :

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (\text{B.18})$$

Reunindo as equações (B.8),(B.9),(B.10),(B.11),(B.13),(B.14),(B.15),(B.17) e (B.18), conclui-se que o sistema de equações (B.14),(B.15) e (B.16) pode ser reinscrito em função do deslocamento das partículas e do tensor de tensões resultando nas equações abaixo:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\
\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\
\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \\
\tau_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\
\tau_{yy} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\
\tau_{zz} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \\
\tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \\
\tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\
\tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Este conjunto de equações pode ser transformado em um sistema de equações hiperbólicos de primeira ordem, que as reescreve em função das velocidades das partículas e derivadas temporais de tensor de tensões, formando as expressões representativas de cada componente espacial. Lembre-se que :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} \\
\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} \\
\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial v_z}{\partial t}
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Aplicando B.20 em B.19 temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{B.21}$$

onde v_x, v_y e v_z são, respectivamente, as componentes da velocidade da partícula nos eixos horizontal e vertical; $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}, \tau_{xy}$ e τ_{xz} representam os tensores de tensão nas respectivas direções; ρ é a densidade por unidade de volume; λ e μ são as constantes de Lamé que representam as constantes elásticas do material.

As velocidades de propagação das ondas compressionais V_p e cisalhantes V_s também podem ser escritas em função das constantes de Lamé e da densidade de acordo com as equações a seguir:

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{B.22}$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{B.23}$$

Apêndice C

Fórmula de Modelagem Discreta da Equação Elástica da Onda

Faz-se agora a discretização do sistema de equações (B.21) conforme o esquema da malha intercalada de VIRIEUX (1986), mas escrito em termos do operador convolucional. Desta forma, na discretização é considerado que as incógnitas e as propriedades estão defasadas de uma distância correspondente à metade do intervalo entre os pontos do malha, além disto as velocidades das partículas e as tensões também estão definidas em intervalos de tempo diferentes, como pode ser visto na Figura C.1.

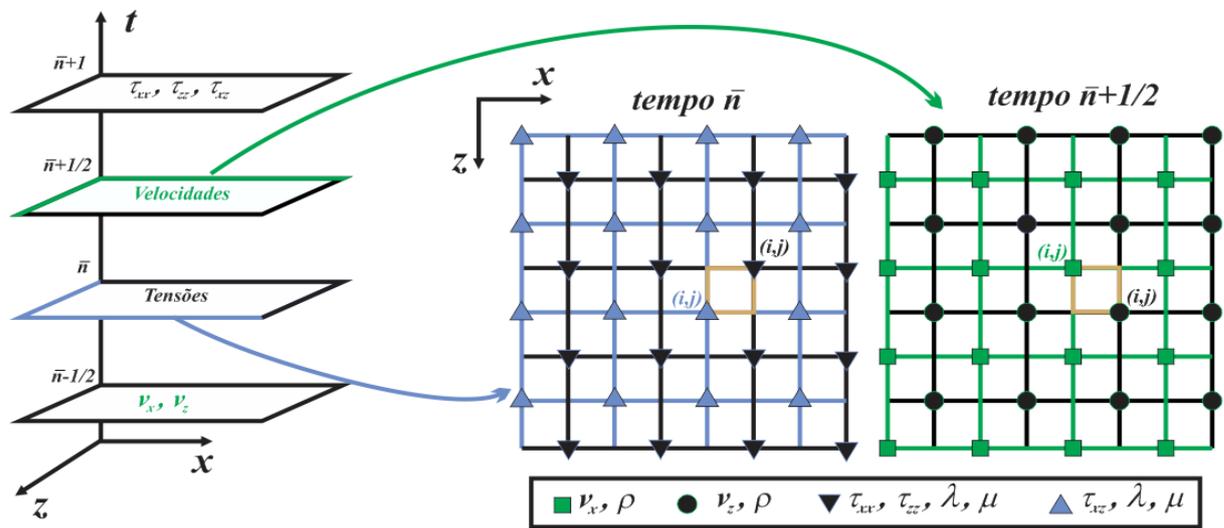


Figura C.1: Malha intercalada no espaço e tempo (modificado de DI BARTOLO (2010)).

As expressões (C.1) a (C.4) correspondem às derivadas dos tensores de tensões com relação às direções coordenadas. Estas expressões são empregadas no cálculo das componentes da velocidade da partícula, como pode ser observado nas equações

(C.5) e (C.6).

$$T_{1[i,j]}^{\bar{n}} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \Big|_{[i,j]}^{\bar{n}} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{mi=1}^{N/2} S_{mi} \left(\tau_{xx[i+mi-1,j]}^{\bar{n}} - \tau_{xx[i-mi,j]}^{\bar{n}} \right) \quad (C.1)$$

$$T_{2[i,j]}^{\bar{n}} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \Big|_{[i,j]}^{\bar{n}} = \frac{1}{\Delta z} \sum_{mj=1}^{N/2} S_{mj} \left(\tau_{xz[i,j+mj-1]}^{\bar{n}} - \tau_{xz[i,j-mj]}^{\bar{n}} \right) \quad (C.2)$$

$$T_{3[i,j]}^{\bar{n}} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \Big|_{[i,j]}^{\bar{n}} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{mi=1}^{N/2} S_{mi} \left(\tau_{xz[i+mi,j]}^{\bar{n}} - \tau_{xz[i-mi+1,j]}^{\bar{n}} \right) \quad (C.3)$$

$$T_{4[i,j]}^{\bar{n}} = \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \Big|_{[i,j]}^{\bar{n}} = \frac{1}{\Delta z} \sum_{mj=1}^{N/2} S_{mj} \left(\tau_{zz[i,j+mj]}^{\bar{n}} - \tau_{zz[i,j-mj+1]}^{\bar{n}} \right) \quad (C.4)$$

$$v_{x[i,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} = v_{x[i,j]}^{\bar{n}-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho_{[i,j]}} \left(T_{1[i,j]}^{\bar{n}} + T_{2[i,j]}^{\bar{n}} \right) \quad (C.5)$$

$$v_{z[i,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} = v_{z[i,j]}^{\bar{n}-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho_{[i,j]}} \left(T_{3[i,j]}^{\bar{n}} + T_{4[i,j]}^{\bar{n}} \right) \quad (C.6)$$

As expressões (C.7) a (C.9) correspondem às derivadas parciais das velocidades das partículas com relação às direções coordenadas. Sendo estas utilizadas no cálculo das componentes do tensor de tensões (equações (C.11), (C.12) e (C.13)).

$$A_{1[i,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Big|_{[i,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{mi=1}^{N/2} S_{mi} \left(v_{x[i+mi,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} - v_{x[i-mi+1,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} \right) \quad (C.7)$$

$$A_{2[i,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} = \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{[i,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta z} \sum_{mj=1}^{N/2} S_{mj} \left(v_{x[i,j+mj]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} - v_{x[i,j-mj+1]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} \right) \quad (C.8)$$

$$A_{3[i,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \Big|_{[i,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{mi=1}^{N/2} S_{mi} \left(v_{z[i+mi-1,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} - v_{z[i-mi,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} \right) \quad (C.9)$$

$$A_{4[i,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{[i,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta z} \sum_{mj=1}^{N/2} S_{mj} \left(v_{z[i,j+mj-1]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} - v_{z[i,j-mj]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} \right) \quad (C.10)$$

$$\tau_{xx[i,j]}^{\bar{n}+1} = \tau_{xx[i,j]}^{\bar{n}} + \Delta t \left[(\lambda + 2\mu) A_{1[i,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} + \lambda A_{2[i,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} \right] \quad (C.11)$$

$$\tau_{zz[i,j]}^{\bar{n}+1} = \tau_{zz[i,j]}^{\bar{n}} + \Delta t \left[(\lambda + 2\mu) A_{2[i,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} + \lambda A_{1[i,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} \right] \quad (C.12)$$

$$\tau_{xz[i,j]}^{\bar{n}+1} = \tau_{xz[i,j]}^{\bar{n}} + \Delta t \left[(\lambda + 2\mu) A_{3[i,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} + \lambda A_{4[i,j]}^{\bar{n}+\frac{1}{2}} \right] \quad (C.13)$$

Para o avanço da solução ao longo do tempo calcula-se os campos das velocidades das partículas em função dos campos do tensor de tensões e, em seguida,

atualizam-se os campos do tensor de tensões em função dos campos das velocidades da partícula. Portanto, na implementação computacional, a determinação dos campos das velocidades das partículas e dos campos do tensor de tensões é realizada em dois momentos diferentes.

Para a propagação de um campo de ondas gerado por uma fonte sísmica explosiva, deve-se usar as componentes de tensões normais, isto é,

$$\tau_{xx[i,j]}^{\bar{n}+1} = \tau_{xx[i,j]}^{\bar{n}} + f^{\bar{n}}\delta(i - i_f)\delta(j - j_f), \quad (\text{C.14})$$

$$\tau_{zz[i,j]}^{\bar{n}+1} = \tau_{zz[i,j]}^{\bar{n}} + f^{\bar{n}}\delta(i - i_f)\delta(j - j_f). \quad (\text{C.15})$$

Para realizar a separação do campo de ondas elástico em campo compressional e cisalhante aplica-se os operadores divergente e rotacional aplicados sobre as componentes horizontais e verticais do campo de velocidade das partículas. Logo, tem-se (SILVA, 2009):

$$P = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (\text{C.16})$$

$$S = \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad (\text{C.17})$$

onde P representa o campo escalar e S e apresenta o campo vetorial, cujas amplitudes estão associadas as ondas compressionais e cisalhantes, respectivamente.

Apêndice D

Fonte Sísmica e Tratamento das Reflexões de Bordas

D.1 Fonte Sísmica

Na seção 3.1 foi incorporado um termo fonte a equação da onda na posição \mathbf{x}_f , cujo objetivo é iniciar a propagação no tempo e no espaço. Com o propósito de simular uma fonte sísmica real, este termo fonte precisa ter algumas características, como ser preferencialmente limitado, tanto no domínio do tempo, para simular uma fonte sísmica do tipo explosiva, quanto no domínio da frequência, para que se tenha um controle sobre a frequência máxima ao qual o modelo numérico está sujeito (BULCÃO, 2004).

O termo fonte utilizado nesta dissertação para a geração do sinal sísmico é denominada wavelet de Ricker (NORMAN, 1953) cuja forma é escrita como segue:

$$f(t) = \left[1 - 2\pi(\pi f_c t_d)^2\right] e^{-\pi(\pi f_c t_d)^2}, \quad (\text{D.1})$$

onde $t_d = n\Delta t - t_f$ representa uma translação temporal da fonte no tempo de modo que a wavelet inicie na origem, e sendo t_f o período da função Gaussiana, dado por:

$$t_f = \frac{2\sqrt{\pi}}{f_c} \quad (\text{D.2})$$

e f_c a frequência central da fonte, que é escrita em termos da maior frequência contida no espectro da função fonte, f_{corte} , dada por:

$$f_c = \frac{f_{corte}}{3\sqrt{\pi}}. \quad (\text{D.3})$$

A Figura D.1 ilustra um exemplo da função fonte no domínio do tempo e seu correspondente espectro de frequência.

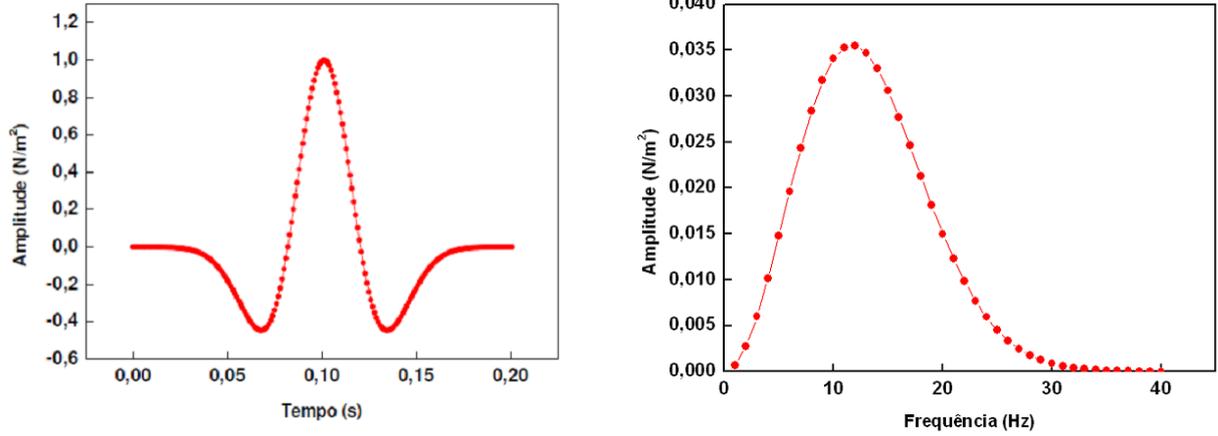


Figura D.1: Função fonte e seu espectro de frequência para $f_{corte} = 40\text{Hz}$.

D.2 Tratamento das Reflexões de Bordas

A fim de simular problemas com domínios infinitos ou semi-infinitos visando garantir um correto truncamento do modelo numérico sem o surgimento de reflexões artificiais nos respectivos bordos, descreve-se alguns artifícios comumente empregados nas simulações geofísicas.

Um artifício bastante utilizado, devido à introdução de contornos artificiais, é aquela denominada por condição de contorno não-reflexiva ou condição de contorno absorvora (REYNOLDS, 1978). Assim, pode-se dizer que as condições de contorno não-reflexivas visam absorver a energia da frente de ondas quando esta incide no contorno.

O modo mais simples de se derivar uma condição de contorno não-reflexiva é através da fatoração da equação da onda unidimensional, tal que

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \right) [P] = 0. \quad (\text{D.4})$$

O primeiro termo do segundo membro da equação (D.4) é relativo a ondas viajando no sentido negativo do eixo x e o segundo termo, no sentido positivo. Assim, para eliminar as reflexões no contorno esquerdo e direito basta empregar, respectivamente as equações (D.5) e (D.6) abaixo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \right) [P] = 0, \quad (\text{D.5})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \right) [P] = 0. \quad (\text{D.6})$$

Uma forma de reduzir as reflexões espúrias geradas pelo truncamento dos contornos, é aplicar camadas de amortecimento (*damping zones*) numérico para

reduzir a intensidade da onda antes desta incidir sobre o contorno (CERJAN *et al.*, 1985).

O procedimento é feito aplicando a expressão (D.7) a cada ponto da malha pertencente à camada de amortecimento (Figura D.2) durante a propagação do campo de ondas. A redução da amplitude no ponto (i, j) é feita graças aos fatores multiplicativos gerados pela expressão (D.8).

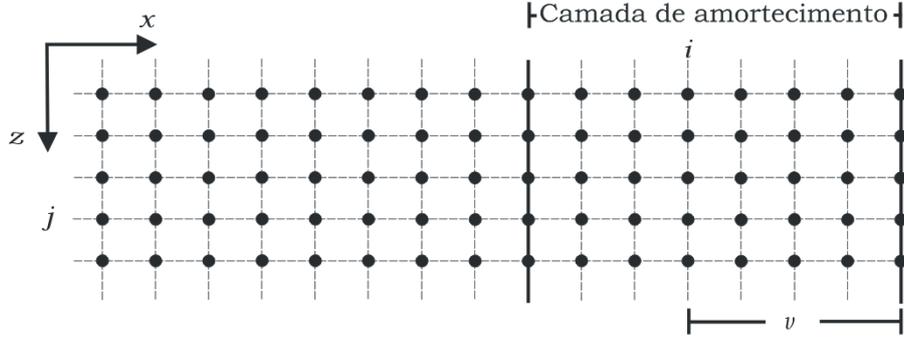


Figura D.2: Camada de amortecimento do lado direito da malha ilustrando o ponto de aplicação do amortecimento. Retirado de DUARTE (2011)

$$P_{i,j}^n = f_{mu}(v)P_{i,j}^n, \quad (D.7)$$

sendo

$$f_{mu}(v) = e^{-[fat(n_{amort}-v)]^2}, \quad (D.8)$$

onde f_{mu} é o fator multiplicativo para atenuar o campo de pressão, v é um índice que denota a distância de determinado ponto em relação ao contorno do modelo, fat é o fator de amortecimento referente à intensidade da redução de amplitude da pressão que se deseja e n_{amort} é o número de pontos que constitui a camada de amortecimento.

Apêndice E

Discretização do Operador Diferencial Convolutacional

Nessa parte da dissertação, será tratada a construção do operador diferencial convolutacional segundo CHU e STOFFA (2012) e ZHOU e GREENHALGH (1992).

No domínio $k_x - x$ a transformada direta e inversa de Fourier, podem ser escritas, respectivamente, como:

$$F(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ik_x x} dx, \quad (\text{E.1})$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x)e^{ik_x x} dk_x, \quad (\text{E.2})$$

onde k_x é o número de onda.

Derivando ambos os lados da Equação E.2 em função de x , tem-se:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ik_x F(k_x)e^{ik_x x} dk_x, \quad (\text{E.3})$$

Derivando novamente, teremos:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -k_x^2 F(k_x)e^{ik_x x} dk_x. \quad (\text{E.4})$$

Sendo assim, do teorema de Fourier temos:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \Leftrightarrow -k_x^2 F(k_x) \quad (\text{E.5})$$

Isso significa dizer que a diferenciação no espaço se transforma na multiplicação no domínio do número de onda. O teorema convolutacional diz que a multiplicação no domínio do número de onda é igual a convolução no domínio espacial. Uma consequência disso é que a diferencial no espaço se traduz à uma operação convolutacional.

Para a derivada segunda, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -k_x^2 F(k_x) e^{ik_x x} dk_x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -k_x^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-ik_x u} du \right) e^{ik_x x} dk_x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -k_x^2 e^{-ik_x(x-u)} dk_x \right) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) d_2(x-u) du
\end{aligned} \tag{E.6}$$

onde

$$d_2(x-u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -k_x^2 e^{-ik_x(x-u)} dk_x \tag{E.7}$$

Para $x-u=0$

$$\begin{aligned}
d_2(x=0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -k_x^2 dk_x \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{3} k_x^3 \right)_{k_{xn}}^{-k_{xn}} \\
&= -\frac{k_{xn}^3}{3\pi}
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Para $x-u \neq 0$

$$\begin{aligned}
d_2(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -k_x^2 e^{ik_x x} dk_x \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{-k_x^2}{ix} e^{ik_x x} \right)_{-\infty}^{\infty} + \frac{2}{ix} \int_{-\infty}^{\infty} k_x e^{ik_x x} dk_x \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{-k_x^2}{ix} e^{ik_x x} \right)_{-\infty}^{\infty} - \left(\frac{2k_x}{x^2} e^{ik_x x} dk_x \right)_{-\infty}^{\infty} + \frac{2}{x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_x x} dk_x \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{-k_x^2}{ix} e^{ik_x x} \right)_{-\infty}^{\infty} - \left(\frac{2k_x}{x^2} e^{ik_x x} dk_x \right)_{-\infty}^{\infty} + \left(\frac{2}{ix^3} e^{ik_x x} \right)_{-\infty}^{\infty} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{-2k_x^2}{x} e^{ik_x x} \right)_{-k_{xn}}^{k_{xn}} + \left(\frac{2}{ix^3} - \frac{k_x^2}{ix} e^{ik_x x} \right)_{-k_{xn}}^{k_{xn}} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-2k_x^2}{x} \cos(k_{xn}x) + \left(\frac{2}{ix^3} - \frac{k_x^2}{x} \right) \sin(k_{xn}x) \right].
\end{aligned} \tag{E.9}$$

Portanto, o operador diferencial para derivada segunda é:

$$d_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2k_{xn}}{x^2} \cos(k_{xn}x) + \left(\frac{2}{x^3} - \frac{k_{xn}^2}{x} \right) \sin(k_{xn}x) \right] & \text{para } x \neq 0 \\ -\frac{k_{xn}^3}{3\pi} & \text{para } x = 0 \end{cases}. \tag{E.10}$$

Segundo CHU e STOFFA (2012), aplicando a regra do retângulo para apro-

ximar a integral convolucional E.6, será encontrada a seguinte fórmula convolucional discreta:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \Delta x \sum_{-\infty}^{\infty} f(n\Delta x) d_2(x - n\Delta x), \quad (\text{E.11})$$

onde Δx é o intervalo de amostragem no eixo x .

Substituindo a equação E.11 em E.9, fazendo $x = 0$ e $xk_{xn} = n\pi$, obtem-se:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{n=-\infty; n \neq 0}^{\infty} \left[-\frac{2}{n^2} \cos(n\pi) \right] f(n\Delta x) \quad (\text{E.12})$$

De outra forma, sabendo que, no domínio discreto, $x = n\Delta x$, pode-se escrever as seguintes considerações para o operador $d_2(x)$ ZHOU e GREENHALGH (1992):

$$\begin{aligned} k_{xn} &= \frac{\pi}{\Delta x}, \\ k_{xn}x &= n\pi, \\ \text{sen}(k_{xn}x) &= \text{sen}(n\pi) = 0, \\ \text{cos}(k_{xn}x) &= \text{cos}(n\pi) = (-1)^n. \end{aligned}$$

Substituindo essas considerações em E.10 tem-se:

$$d_2(n\Delta x) = \begin{cases} \frac{2}{n^2 \Delta x^3} (-1)^{n+1} & \text{para } x \neq 0 \\ -\frac{\pi^2}{3 \Delta x^3} & \text{para } x = 0 \end{cases}. \quad (\text{E.13})$$